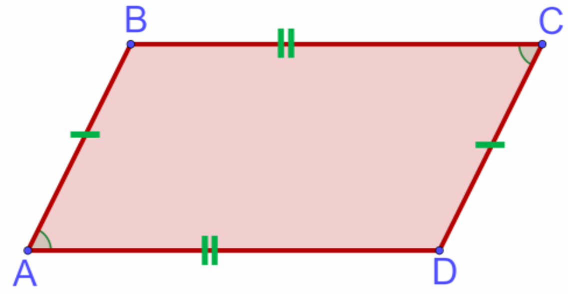
Расчётные геометрические задачи. Задание № 23 ОГЭ по математике

Клепань Людмила Ивановна,

учитель математики МАОУ СОШ №99 имени дважды Героя Советского Союза Бориса Сафонова г. Краснодара

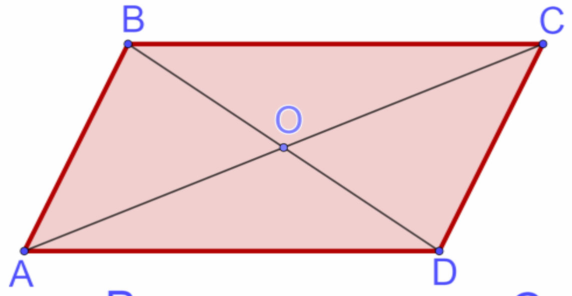
Параллелограмм и его свойства

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны



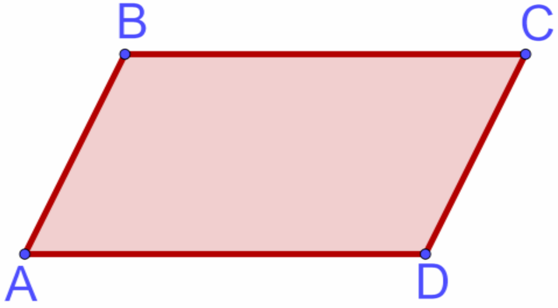
Свойство 1. В параллелограмме противоположные углы и противоположные стороны равны.

$$AB = CD,\ BC = AD;\ \angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$$



Свойство 2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам

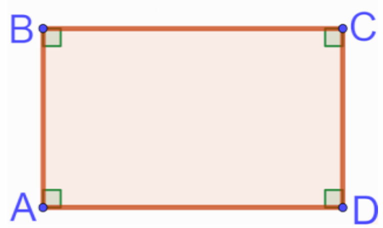
$$AO = OC,\ BO = OD$$



Свойство 3. В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180^o

$\angle A + \angle B = 180^o,\ \ \angle A + \angle D = 180^o$

Прямоугольник и его свойства

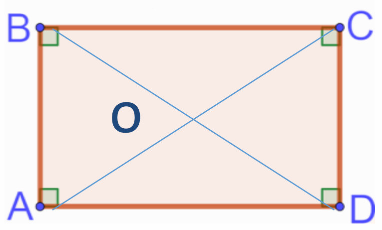


Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые

Свойство 1. Все углы прямоугольника прямые, а противоположные стороны равны.

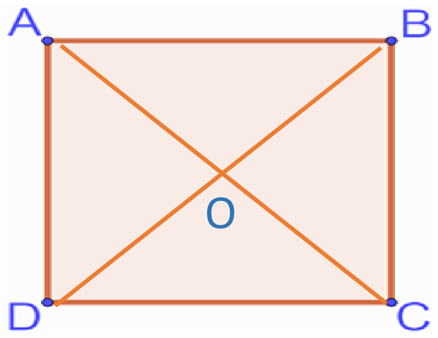
$$\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^0;\ AB = CD,\ BC = AD$$

Свойство 2. Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам.



$$AO = BO = CO = DO$$

Квадрат и его свойства



Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны

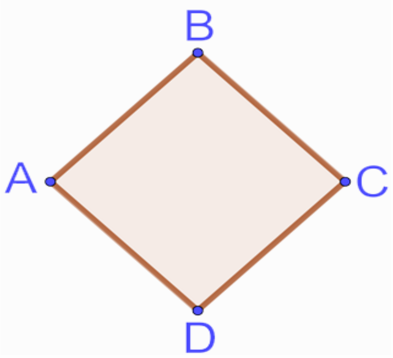
Свойство 1. Все углы квадрата – прямые, а все стороны – равны

$\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^0;\ AB = BC = CD = AD$

Свойство 2. Диагонали квадрата равны и точкой пересечения делятся пополам

$AO = BO = CO = DO$

Ромб и его свойства



Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны

Свойство 1. В ромбе все стороны равны и противоположные углы равны

$\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$

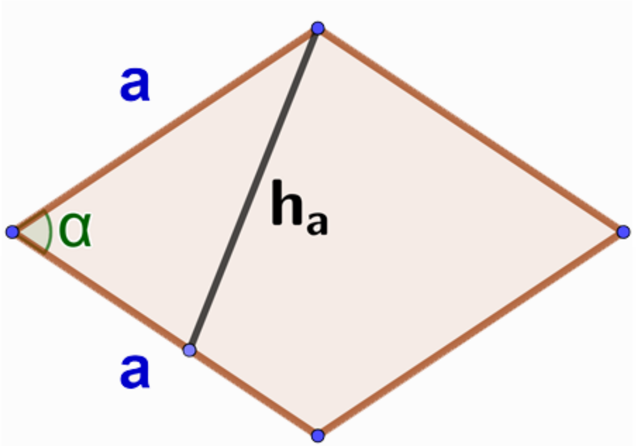
Свойство 2. Диагонали ромба делят его углы пополам

Свойство 3. Сумма углов, прилегающих к одной стороне ромба, равна 180°

$\angle A + \angle B = 180°, \angle C + \angle D = 180°$

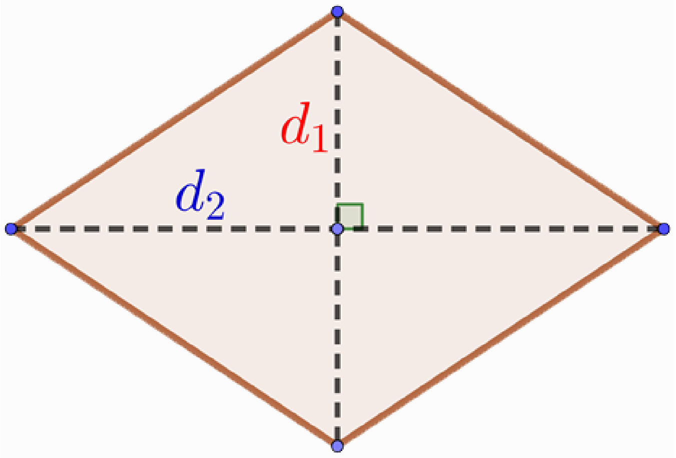
Площадь ромба равна:

- произведению его стороны на высоту
- произведению двух его сторон на синус угла между ними
- половине произведения его диагоналей



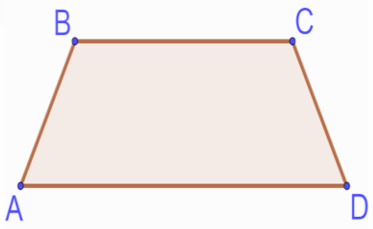
$S = ah_a$

$S = a^2 \sin\alpha$



$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

Трапеция и её свойства



Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны

Свойство 1. Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

$$AB = CD$$

Свойство 2. В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны.

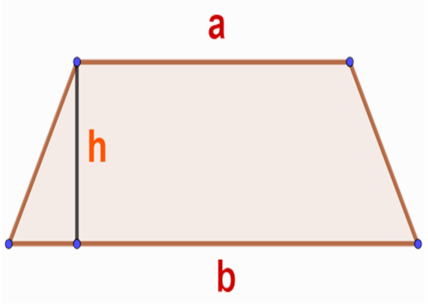
$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle C$$

Свойство 3. Сумма углов, прилегающих к боковой стороне трапеции, равна 180°.

$$\angle A + \angle B = 180°, \angle C + \angle D = 180°$$

Свойство 4. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме:

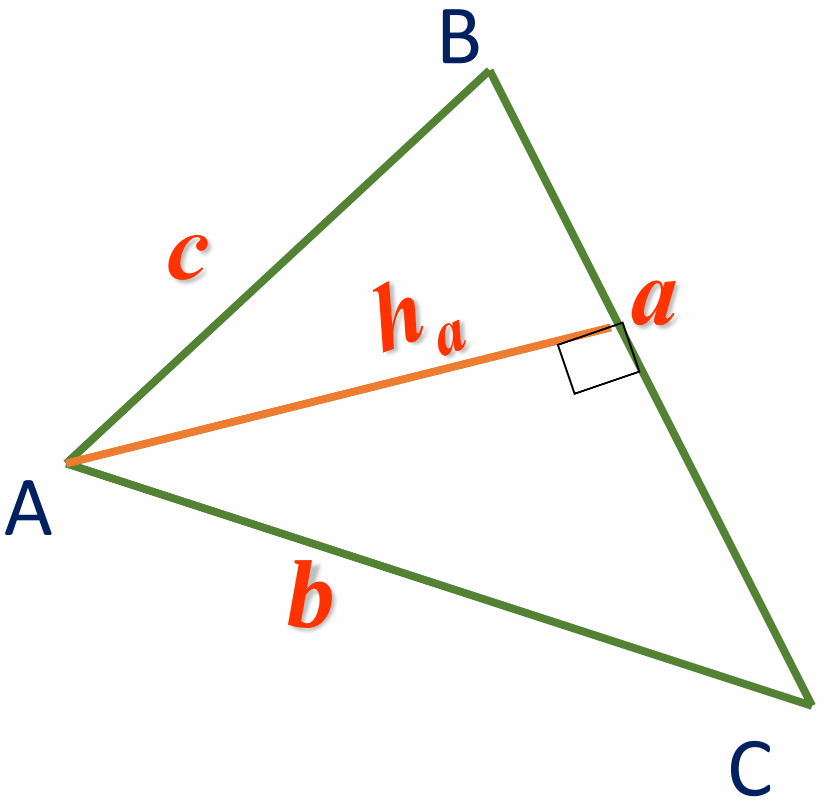
$$L \parallel a\,;\ L \parallel b \qquad L = \frac{a+b}{2}$$



Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту

$$S = \frac{a+b}{2} h$$

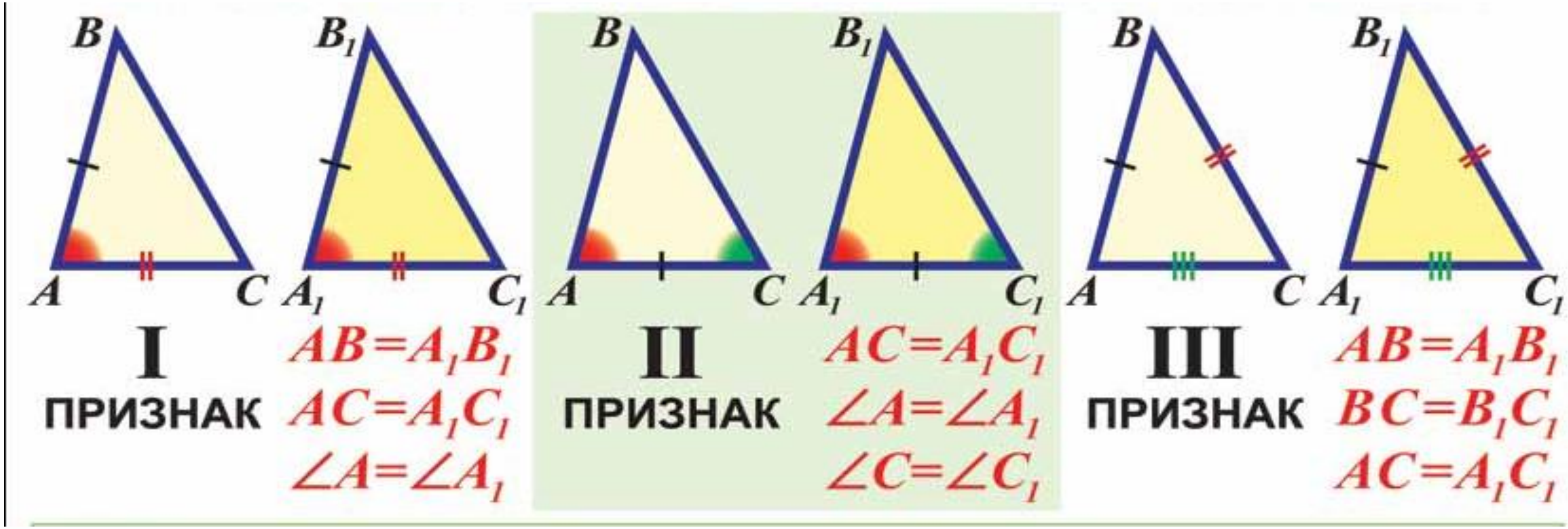
Треугольник



Основные формулы

- $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$
- $P = a + b + c$
- $S = ½·a·h_a$
- $S = ½·a·b·\sin C$
- $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$

Признаки равенства треугольников

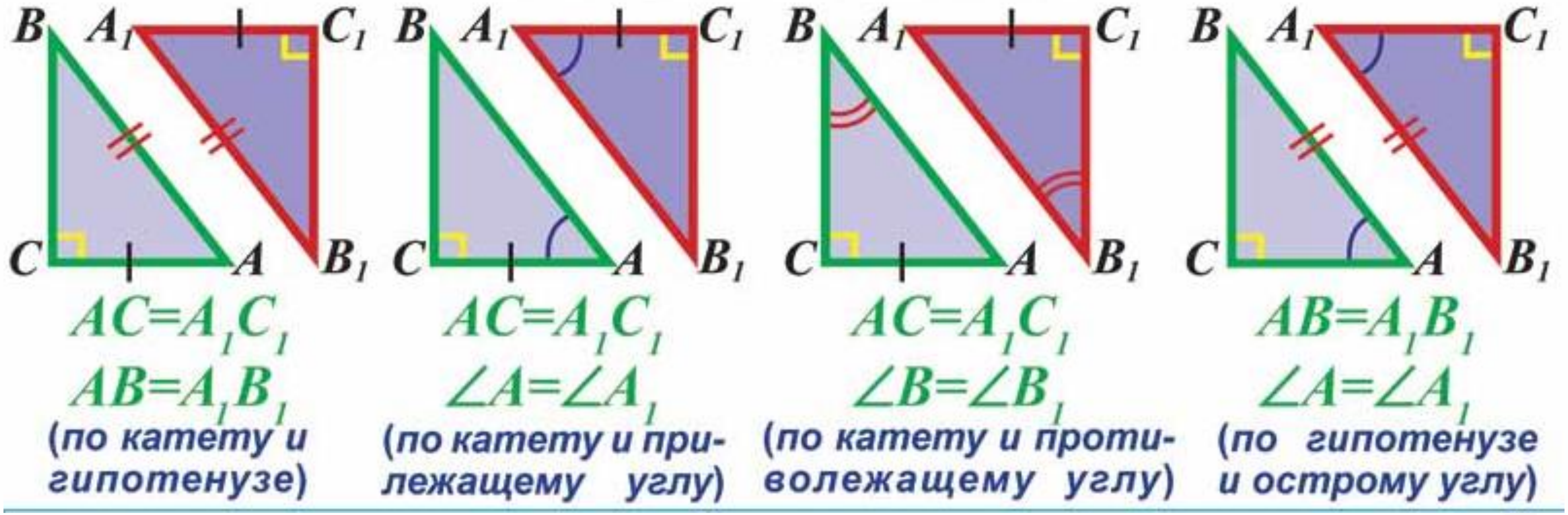


По двум сторонам и углу между ними

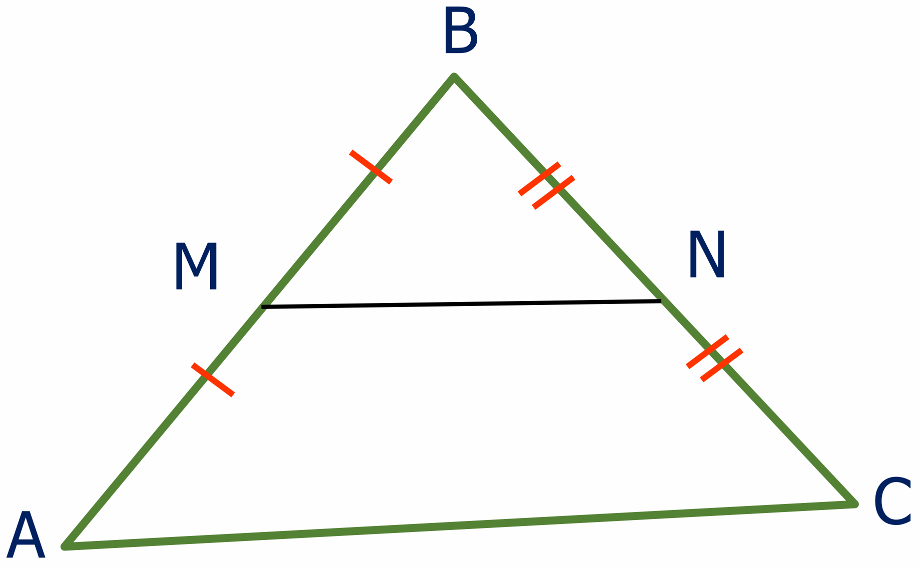
По стороне и двум прилежащим к ней углам

По трём сторонам

Признаки равенства прямоугольных треугольников



Соотношения между сторонами и углами треугольника



В треугольнике АВС:

- против большего угла лежит большая сторона ;
- против большей стороны лежит больший угол
- каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон:

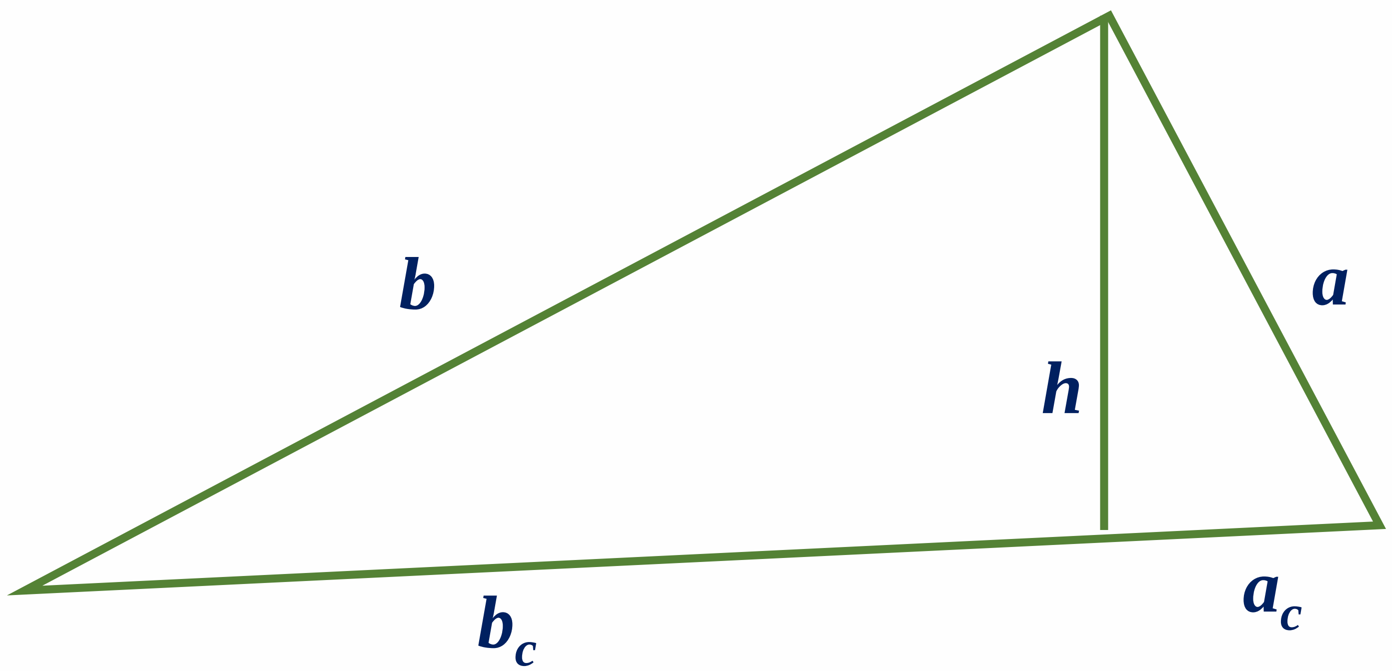
  $AB<AC+CB$, $AC<AB+CB$, $BC<AC+AB$

- **Средней линией** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон

Свойства средней линии треугольника

- $MN=\frac{AC}{2}$
- $MN \parallel AC$

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике



$h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$ или $h^2 = a_c \cdot b_c$;

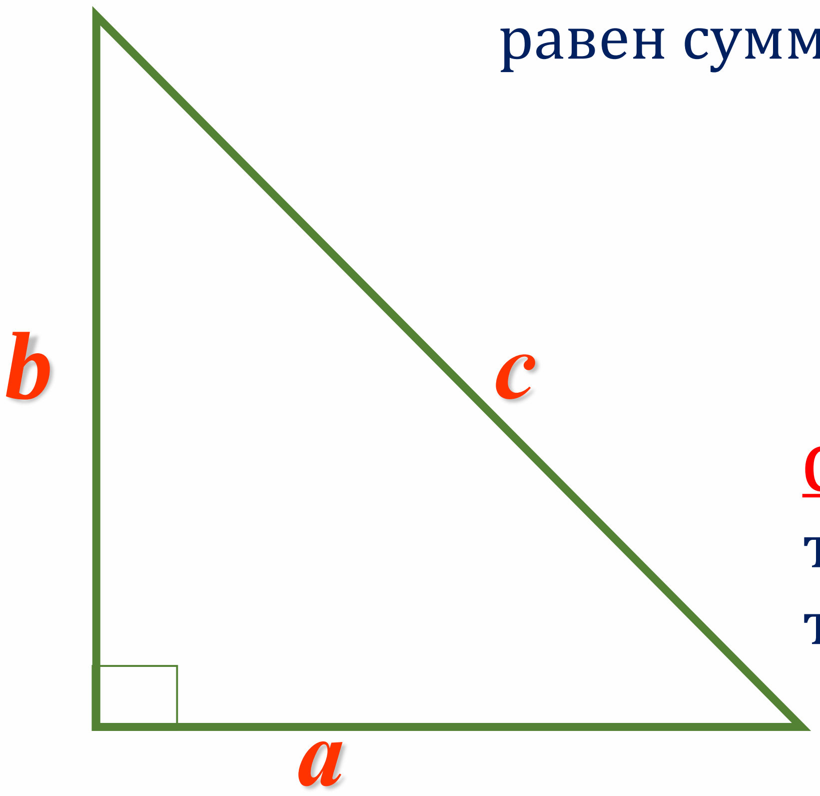
$b = \sqrt{c \cdot b_c}$ или $b^2 = c \cdot b_c$;

$a = \sqrt{c \cdot a_c}$ или $a^2 = c \cdot a_c$;

Теорема Пифагора

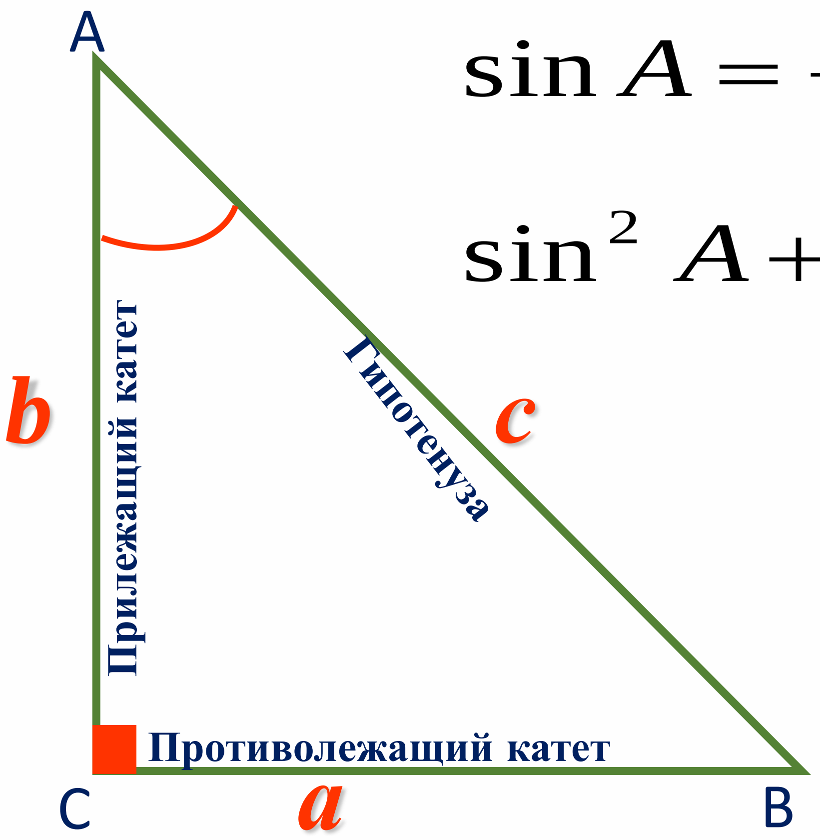
Теорема: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Обратная теорема: Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике



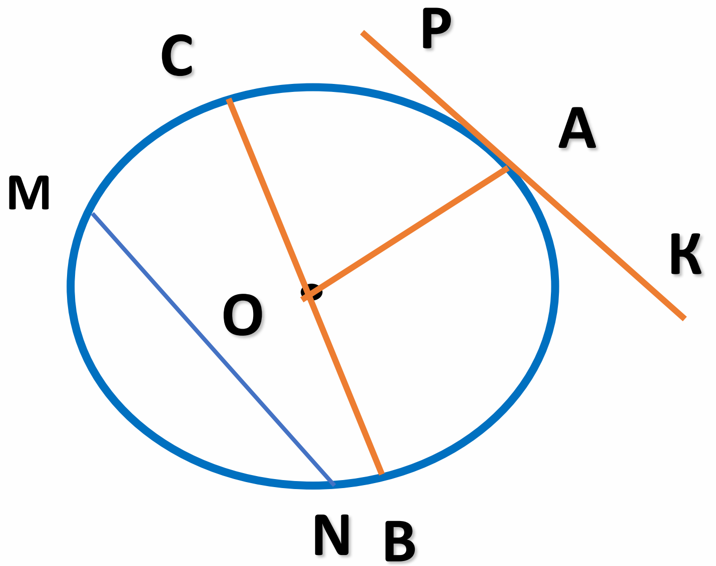
$$\sin A = \frac{a}{c}; \cos A = \frac{b}{c}; tgA = \frac{a}{b}; tgA = \frac{\sin A}{\cos A};$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

Таблица значений sinα, cosα, tgα для некоторых углов

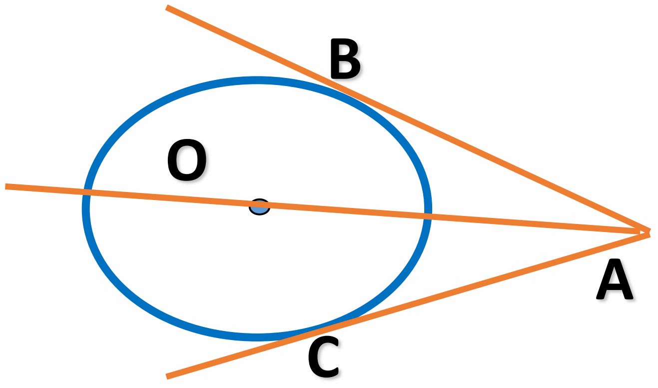
α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sinα	0	½	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	½	0
tgα	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

Окружность



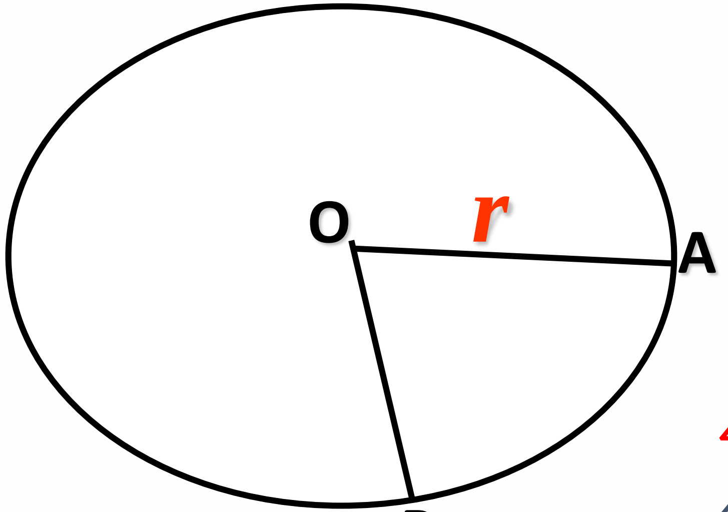
- OA - радиус окружности (r)
- CB - диаметр окружности (d)
- MN – хорда окружности
- AC – дуга окружности
- PK – касательная к окружности
- Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания:

OA⊥PK



- **Отрезки касательных к окружности**, проведённые из одной точки, равны (AB=AC) и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности ($\angle BAO = \angle CAO$).

Окружность



Основные формулы

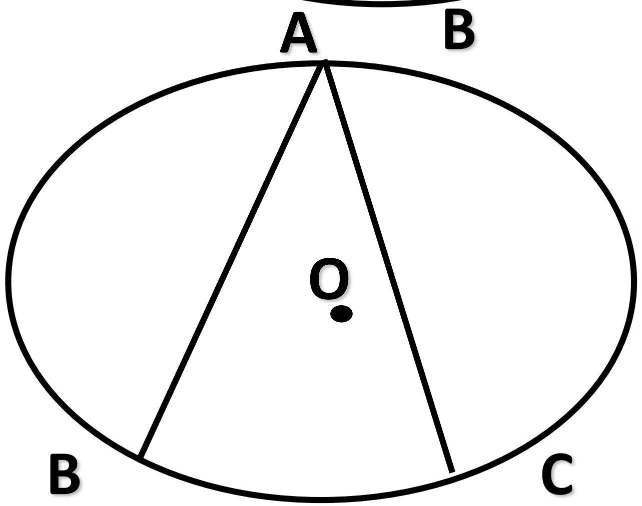
- $d = 2r$
- $C = 2\pi r$ – длина окружности
- $S = \pi r^2$ – площадь круга

∠ AOB – центральный угол

∠ AOB равен дуге AB (AB < полуокружности)

∠ AOB = 360^0 - ∠ AOB

(∠ AOB больше полуокружности)



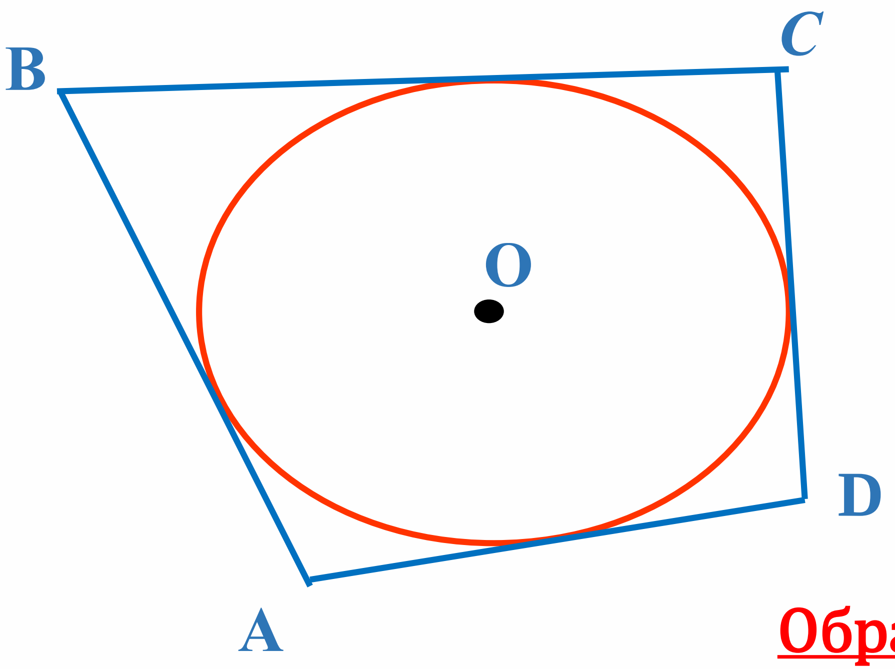
∠ BAC – вписанный угол

∠ BAC равен половине дуги BC

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность - прямой

Окружность

Свойство описанного четырёхугольника



Теорема:

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны

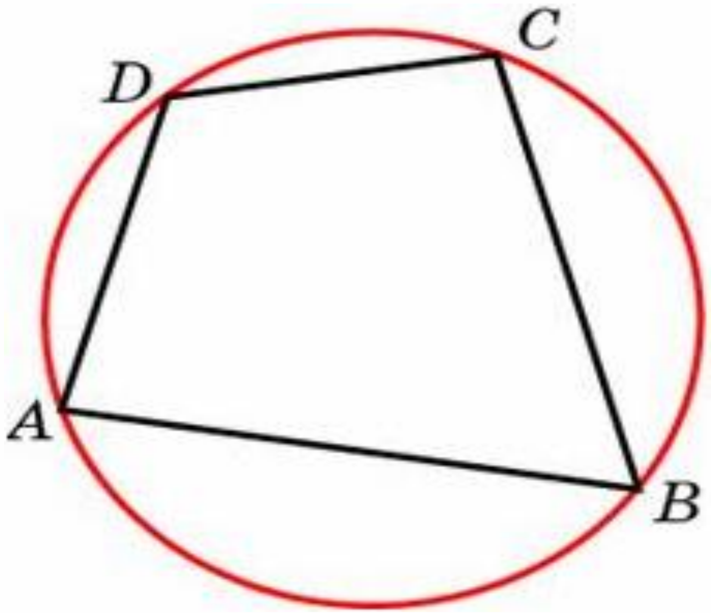
AB + CK = BC + AK

Обратная теорема:

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Окружность

Свойство вписанного четырёхугольника



<u>Теорема:</u>
В любом вписанном четырёхугольнике сумма его противоположных углов равна 180°.

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

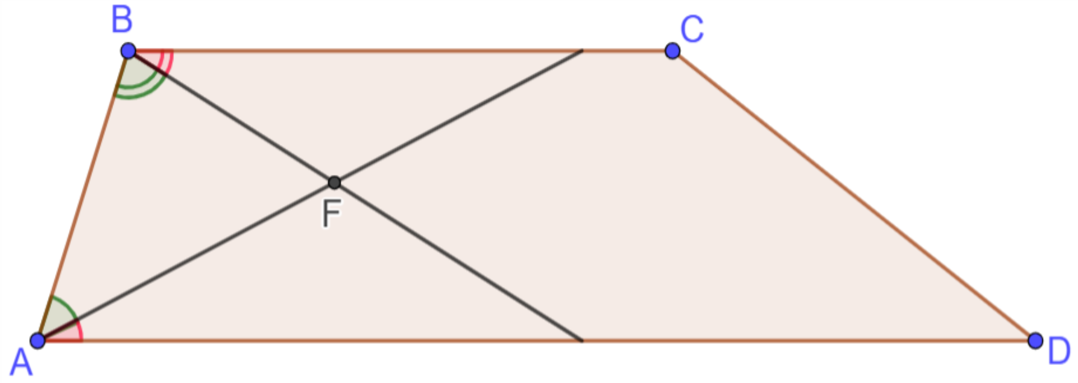
<u>Обратная теорема:</u>
Если сумма противоположных улов четырехугольника равна 180 градусов, то около него можно описать окружность.

Этапы решения геометрических задач

1. Чтение условия задачи, выполнение чертежа с буквенными обозначениями
2. Краткая запись условия задачи
3. Перенос данных условия на чертеж
4. Запись требуемых формул и теорем на черновике
5. Вычерчивание отдельных деталей на дополнительных чертежах
6. Анализ данных задачи, привязка искомых величин к элементам чертежа
7. Составление алгоритма решения
8. Реализация алгоритма решения и его проверка
9. Запись ответа

Задача №1

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF = 24, BF = 32.



Решение:

1.Сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне равна 180°.
Следовательно, $2\angle BAF + 2\angle ABF = 180^0 \Leftrightarrow \angle BAF + \angle ABF = 90^0$.

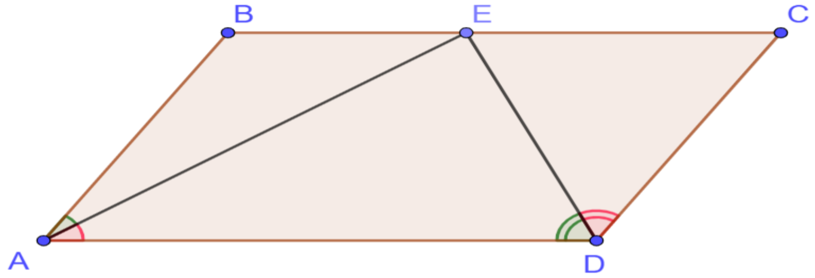
2.Рассмотрим треугольник ABF, сумма углов треугольника равна 180^0**, поэтому** $\angle AFB = 180^0 - \angle BAF - \angle ABF = 90^0$**, то есть треугольник ABF – прямоугольный.**

3. $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{8^2(3^2 + 4^2)} = 8 \cdot \sqrt{25} = 40.$

Ответ: 40

Задача №2

Биссектрисы углов A и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите BC, если AB = 34.



Решение:

1.По определению параллелограмма BC||AD, AE — секущая при параллельных прямых BC и AD, следовательно, углы BEA и EAD равны как накрест лежащие.

2.Так как $\angle BEA = \angle BAE$, треугольник ABE — равнобедренный, откуда $AB = BE$.

3.Аналогично, треугольник CED — равнобедренный и $EC = CD$.

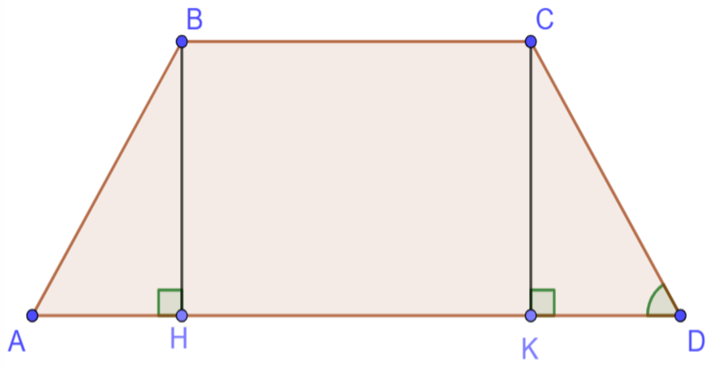
4.Стороны AB и CD равны, как противоположные стороны параллелограмма, следовательно, $AB = BE = EC = CD = 34$.

Таким образом, $BC = 2BE = 68$

Ответ: 68

Задача №3

В трапеции ABCD основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен 60°, сторона AB равна 2. Найдите площадь трапеции.



Решение:

1.Опустим перпендикуляры BH и CK на большее основания AD.

2. Так как $\angle$ADC $=60^0$, тогда $\angle$DCK$=$ $90^0 - 60^0 = 30^0$.

3. Тогда $\mathrm{KD} = \frac{CD}{2}$.

4.Так как AD=2CD по условию, а HK=BC=CD, то $\mathrm{AH} = 2\mathrm{CD} - \mathrm{CD} - \frac{\mathrm{CD}}{2} = \frac{\mathrm{CD}}{2} = KD$.

5.Треугольники ABH и DCK равны по двум катетам (BH=CK, AH = DK).

Следовательно, трапеция ABCD — равнобедренная.

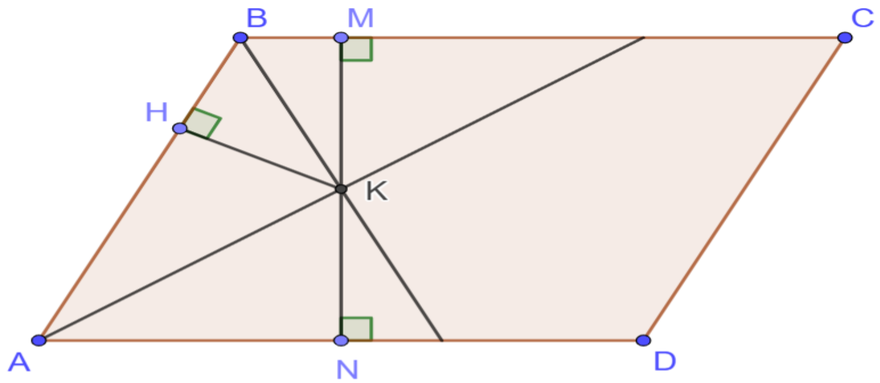
6. Так как AB=2, тогда AD=4. Так как в прямоугольном треугольнике катет равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла, то BH$=AB \cdot sin\angle$BAD $=\sqrt{3}$.

7.Площадь трапеции: $\mathrm{S} = \frac{4+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

Ответ: $3\sqrt{3}$

Задача №4

Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если BC = 19, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.



Решение:

1.Пусть K — точка пересечения биссектрис, KH — высота треугольника AKB, MN — высота параллелограмма, проходящая через точку K.

2.Рассмотрим равные прямоугольные треугольники AHK и AKN (углы HAK и KAN равны, поскольку AK — биссектриса, сторона AK — общая).

3. Значит KN = KH = 7.

4.Аналогично, равны треугольники BKH и BKM, откуда MK = KH = 7.

5. MN= KN+MK= 7+7=14

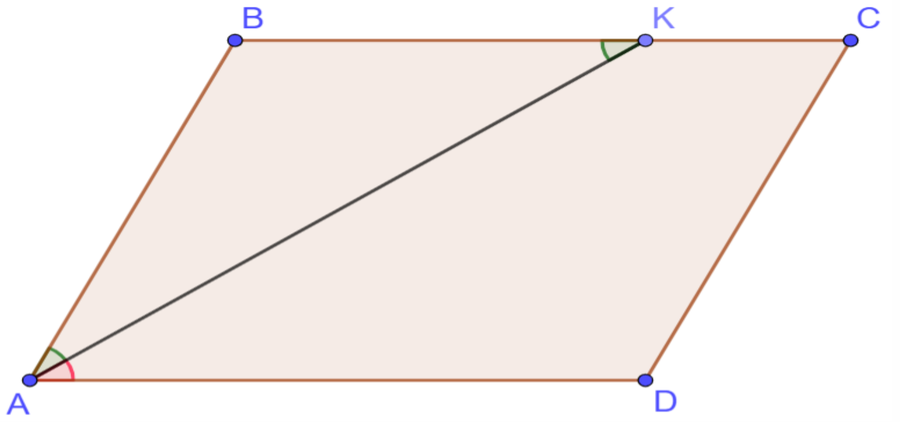
6.Найдем площадь параллелограмма:

$$S = AD \cdot MN = AD \cdot (MK + KN) = 19 \cdot 14 = 266.$$

Ответ: 266

Задача №5

Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если BK = 6, CK = 10.



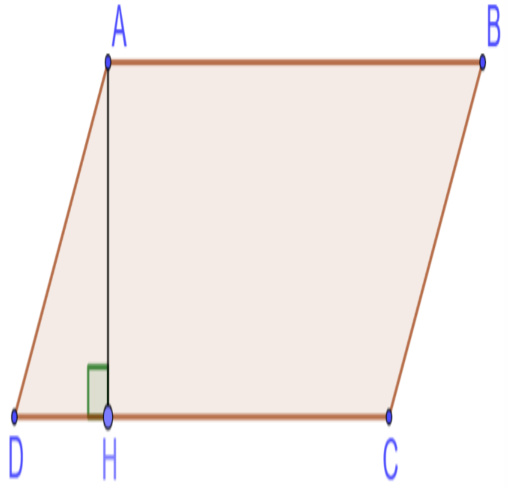
Решение:

1. Так как BC и AD параллельны, AK – секущая, поэтому накрест лежащие углы BKA и KAD равны
2. AK — биссектриса угла BAD, следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$.
3. Значит, треугольник BKA равнобедренный и AB = BK = 6.
4. BC = BK + CK = 6+10=16.
5. Найдем периметр параллелограмма: $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (6 + 16) = 2 \cdot 22 = 44$

Ответ: 44

Задача №6

Высота АН ромба ABCD делит сторону DC на отрезки DH =21 и CH=8. Найдите высоту ромба.



Решение:

1.ABCD ромб, поэтому AD =DC=DH+HC=29

2. AH - высота ромба, поэтому треугольник ADH -прямоугольный

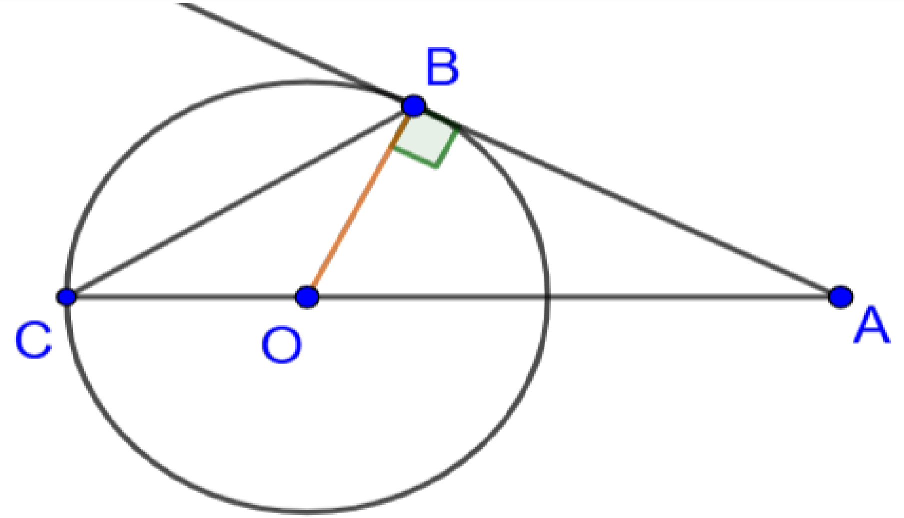
3.Используя теорему Пифагора, найдём высоту ромба

AH $=\sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$

Ответ :20

Задача №7

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 7,5, а AB = 2.



Решение:

Пусть O — центр окружности.

Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Поэтому треугольник OBA — прямоугольный.

Найдем OA по теореме Пифагора:

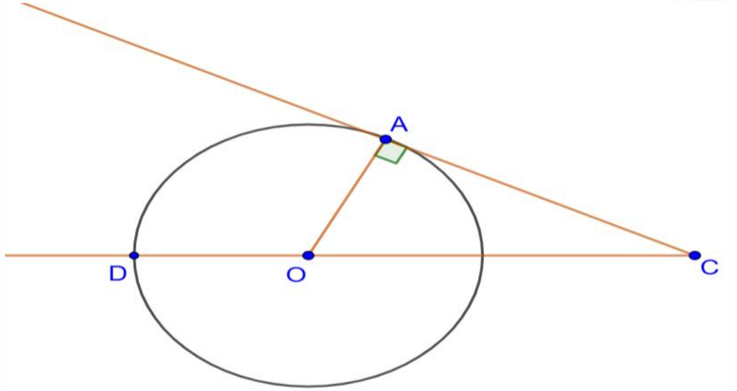
$$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{4 + (\frac{15}{4})^2} = \sqrt{\frac{289}{16}} = \frac{17}{4} = 4{,}25$$

Следовательно, AC = CO + OA = 3,75 + 4,25 = 8.

Ответ: 8

Задача №8

Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна 100°.



Решение:

1.Проведем радиус OA в точку касания. Так как касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, получим прямоугольный треугольник AOC

2.$\angle OAC = 90°$

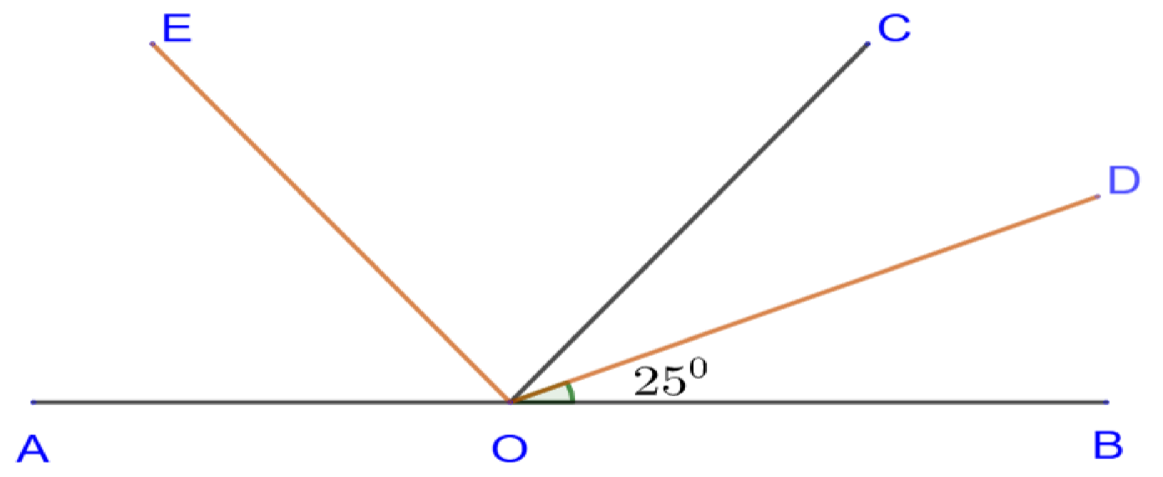
3. Углы COA и AOD – смежные, поэтому $\angle COA = 180° - \angle AOD = 180° - 100° = 80°$

4.Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°, поэтому $\angle ACO = 90° - 80° = 10°$.

Ответ: 10

Задача 9

Найдите величину угла AOE, если OE — биссектриса угла AOC, OD — биссектриса угла COB.



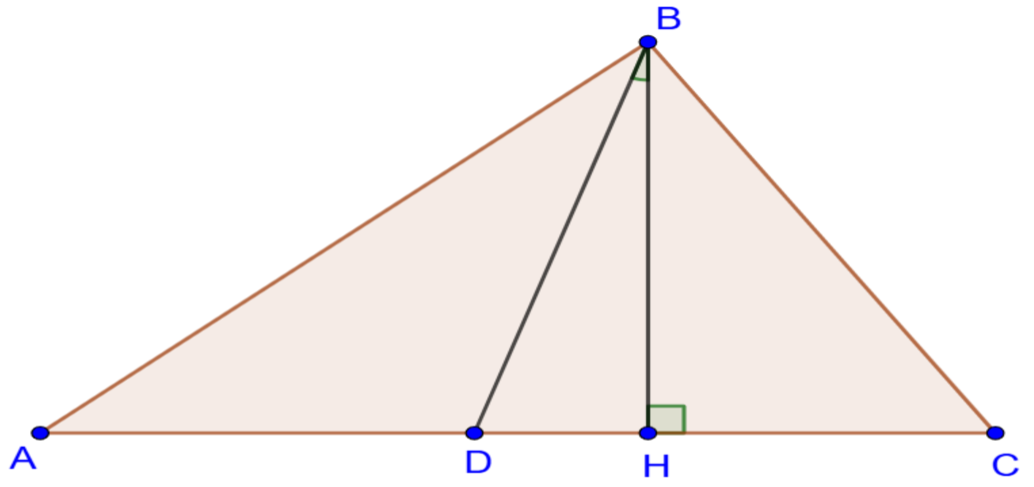
<u>Решение:</u>

1. $\angle COB = 2 \cdot 25° = 50°$ (OD — биссектриса угла COB)
2. $\angle AOC = 180° - 50° = 130°$ ($\angle AOC$ и $\angle COB$ - смежные)
3. $\angle AOE = 130° : 2 = 65°$ (OE — биссектриса угла AOC)

Ответ: 65°

Задача №10

В треугольнике ABC углы A и C равны 40° и 60° соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.



Решение:

1.Из треугольника ABC найдем $\angle ABC$:

$\angle ABC = 180° - 40° - 60° = 80°$

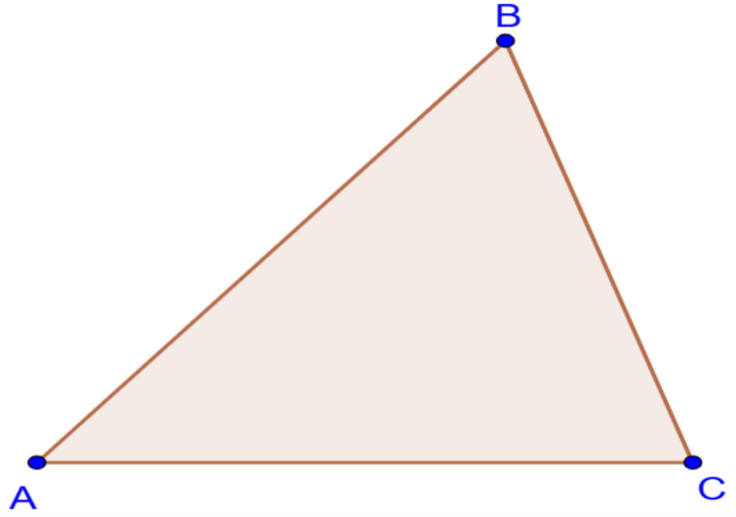
2.$\angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 40°$ т.к. BD — биссектриса

3. Так как BH - высота, тогда треугольник HBC — прямоугольный. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, следовательно, $\angle HBC = 90° - \angle C = 90° - 60° = 30°$

4.Найдем угол DBH: $\angle DBH = \angle DBC - \angle HBC = 40° - 30° = 10°$

Ответ: 10°

Задача №11



Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 67° и 83°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 16.

Решение:

Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому

$\angle A = 180° - 67° - 83° = 30°$

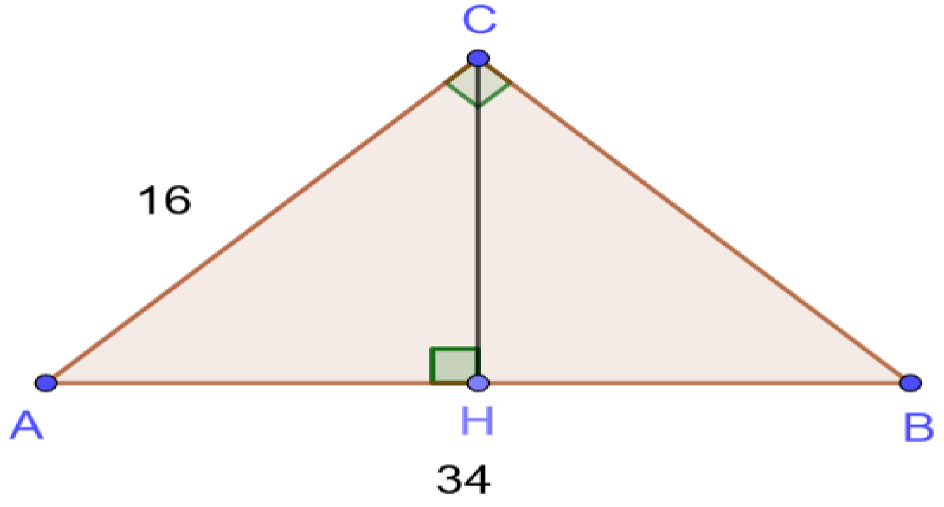
По теореме синусов: $2R = \frac{BC}{sinA} = \frac{AB}{sinC} = \frac{AC}{sinB}$

Откуда получаем, что $BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 16$.

Ответ: 16

Задача №12

Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 16 и 34. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.



Решение:

1) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC.
2) По теореме Пифагора: $AB^2=AC^2+CB^2$, откуда выразим

   $CB^2=AB^2-AC^2$

   $CB^2=34^2-16^2=900$

   $CB=30$
3) Выразим площадь прямоугольного треугольника через катеты и через гипотенузу и высоту, опущенную на неё, приравняв площади, найдем высоту.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CH$$

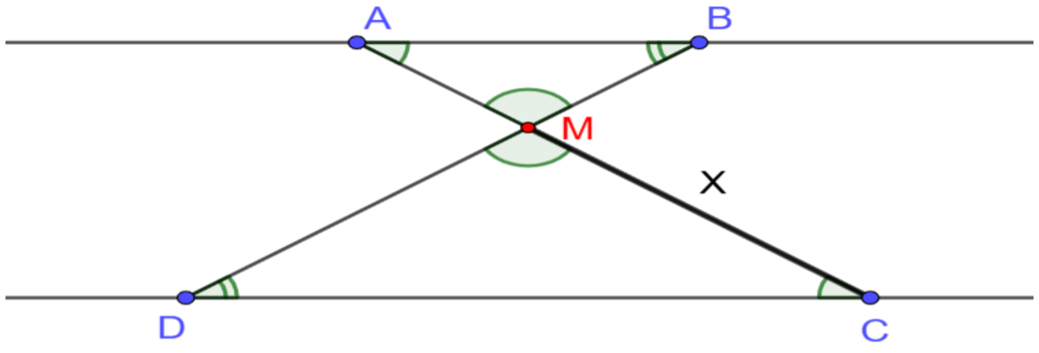
$$\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{1}{2}AC\cdot CB$$

$$CH=\frac{16\cdot 30}{34}=\frac{480}{34}=\frac{240}{17}$$

Ответ: $\frac{240}{17}$

Задача №13

Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=13, DC=65, AC=42.



Решение:

Так AB и DC параллельны, AC- секущая, поэтому угол BAC равен углу ACD как накрест лежащие, кроме того углы AMB и DMC равны как вертикальные и поэтому $\Delta ABM \infty \Delta CDM$ по двум углам. Пусть MC=x, AM=42-x. Составим пропорцию $\frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AB}$ и найдем x.

$$\frac{x}{42 - x} = \frac{65}{13}$$

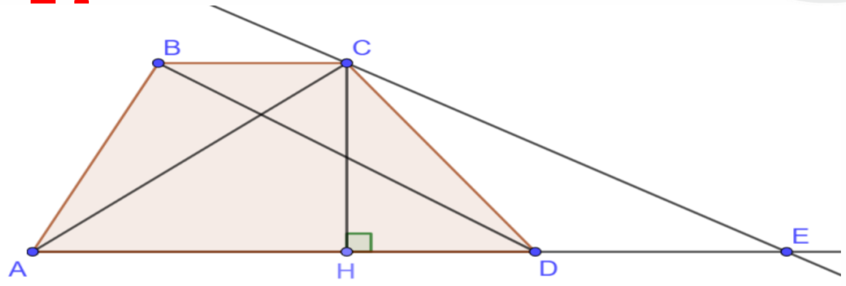
$6x = 210$

x=35

Ответ: 35

Задача №14

Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 15 и 7, а средняя линия равна 10.



Решение:

1.Пусть AC=7, BD=15, m=10 - длина средней линии.

2.Проведем высоту CH и проведем прямую CE, параллельную BD.

3.Рассмотрим четырехугольник BCED:

BC||DE, BD||CE следовательно, BCED — параллелограмм, откуда DE=BC, BD=CE=15.

4.Рассмотрим ΔACE, AE=AD+DE=AD+BC=2m=20. Пусть p — полупериметр ΔACE Найдем площадь ΔACE по формуле Герона: $S_{ACE} = \sqrt{p(p-AC)(p-CE)(p-AE)} = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = 42.$

5.Выразим площадь треугольника ACE : $S_{ACE} = \frac{1}{2} AE \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{2S_{ACE}}{AE} \Leftrightarrow CH = 4{,}2$

6.Площадь трапеции: $S=\frac{AD+BC}{2} \cdot CH = m \cdot CH = 10 \cdot 4{,}2 = 42$

Ответ: 42

Спасибо за внимание.

Удачи на экзаменах.