Решение прикладных задач с применением производной

Костюченко Анастасия Сергеевна,
учитель математики МБОУ СОШ № 43 станицы Северской МО Северский район имени Героя Советского Союза С.Г. Соболева

Производная функции описывает, как изменяется функция при изменении её аргумента. Это ключевое понятие, необходимое для решения практических инженерных задач.

Обучающиеся старших классов сталкиваются с проблемой недостатка практических навыков применения производной в реальных задачах. Несмотря на теоретическую подготовку, многие из них не могут эффективно использовать полученные знания для решения конкретных инженерных и экономических задач.

Это вызывает необходимость в разработке практических заданий, которые помогут обучающимся не только понять теоретические аспекты производной, но и научиться применять их в реальных ситуациях.

Введение в понятие производной

- Изучение производной в инженерии акцентирует внимание на ее практической значимости, позволяя анализировать поведение систем, например, нагрузку на мосты и здания.

- Производная помогает находить экстремумы функций, что важно для оптимизации параметров системы, таких как работа двигателя или количество материалов в конструкции.

- В инженерии модель и анализ данных через производные критичны для эффективности и безопасности работы систем, а также для предсказания сценариев в автоматизированных механизмах.

Определение

Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Определение и графическое представление производной

Определение производной

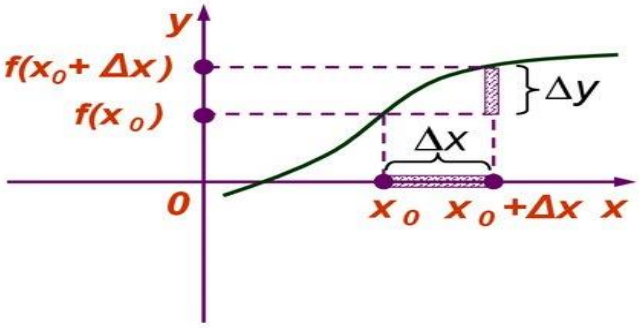
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

Аргументу x придадим некоторое приращение Δx:

$$x_0 + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



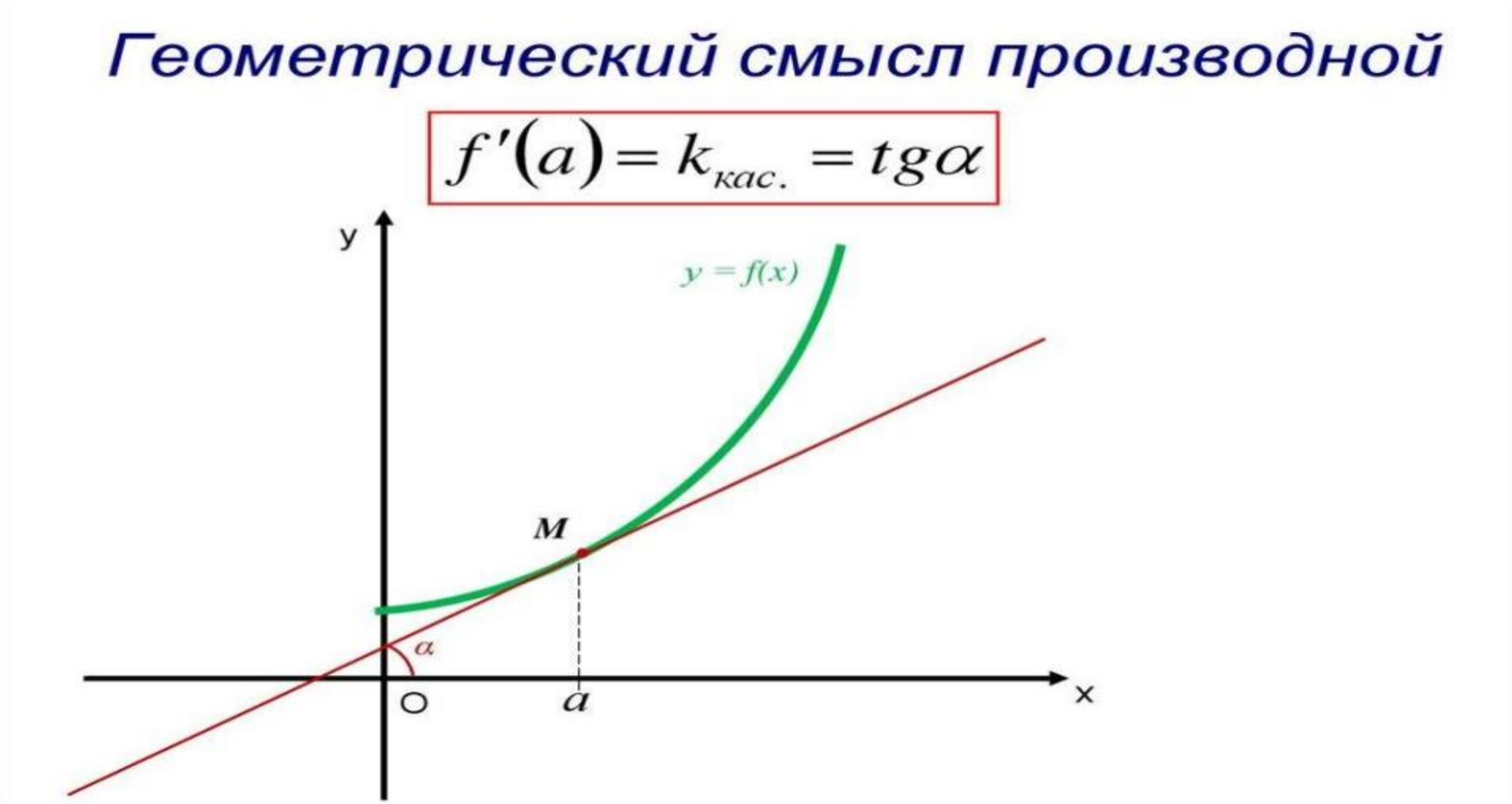
Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

Определение и графическое представление производной

Геометрический и физический смысл производной

Производная функции определяет мгновенную скорость изменения и угол наклона касательной к графику функции. В инженерии она используется для анализа максимальных и минимальных нагрузок в конструкциях, а также в механике — для скорости и ускорения. В термодинамике производные помогают оценить изменение температуры. В электротехнике — для анализа тока и напряжения. Кроме того, в оптимизации применяется метод градиентного спуска на основе производной функции потерь, что критично для повышения эффективности проектирования.



Геометрический смысл производной и его интерпретация

Геометрический смысл производной

Значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;f(x_0))$

$$k = f'(x_0) = tg\alpha$$

Геометрический смысл производной и его интерпретация

Наибольшее и наименьшее значения функции

Оптимизация процессов:
Экстремумы функций имеют критическое значение для оптимизации в инженерии, позволяя находить более эффективные решения для различных задач.

Анализ производной:
Исследование производной помогает определить точки, где функция достигает своих максимальных или минимальных значений, что важно для достижения экономии при эксплуатации.

Практическое применение:
Реальные примеры, такие как проектирование деталей, показывают, как производные помогают минимизировать затраты и максимизировать эффективность в инженерных решениях.

Применение производной для решения прикладных задач

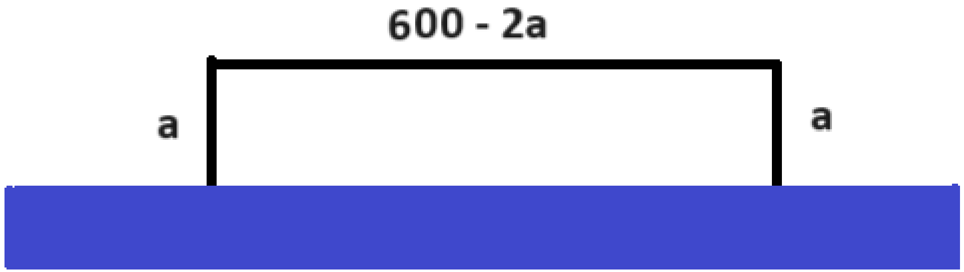
В инженерной практике производная используется для анализа и оптимизации процессов. Примеры включают проектирование деталей машин, где минимизируют массу при заданной жесткости. Также производные помогают в моделировании теплопередачи, гидравлических потоков и оптимизации производственных затрат. Используя производные, можно предсказывать максимальные показатели прочности и минимальные затраты. Анализ производных приводит к более обоснованным решениям в инженерных проектах.

Развитие навыков критического мышления через анализ задач

Критическое мышление формируется через осознанное взаимодействие с информацией. У инженеров, сталкивающихся с практическими задачами, развиваются аналитические способности через изучение производной. Например, оптимизация конструкций требует анализа зависимости прочности материалов от затрат. В экономике производные используют для максимизации прибыли, а в динамических системах помогают контролировать изменения. Разработка навыков критического мышления и способности видеть взаимосвязи крайне важна для подготовки инженеров.

Задача 1

Территорию строительной площадки вдоль реки нужно огородить забором. Площадка должна иметь прямоугольную форму. В распоряжении 600 метров забора, река является естественной преградой. Какую максимальную площадь можно огородить?



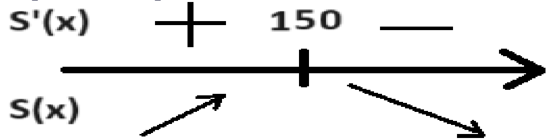
Решение:

Пусть x - длина перпендикулярной к реке стороны, тогда длина противолежащей к ней стороне тоже будет x. Длина параллельной к реке стороны будет равна 600 - 2x. Тогда площадь участка равна:

$$S(x) = x(600 - 2x) = 600x - 2x^2$$

$$S'(x) = 600 - 4x = 4(150 - x)$$

Функция принимает значение 0 в точке x = 150 - это точка "подозрительная на экстремум". Определим характер этой точки



Значит x = 150 - точка максимума.

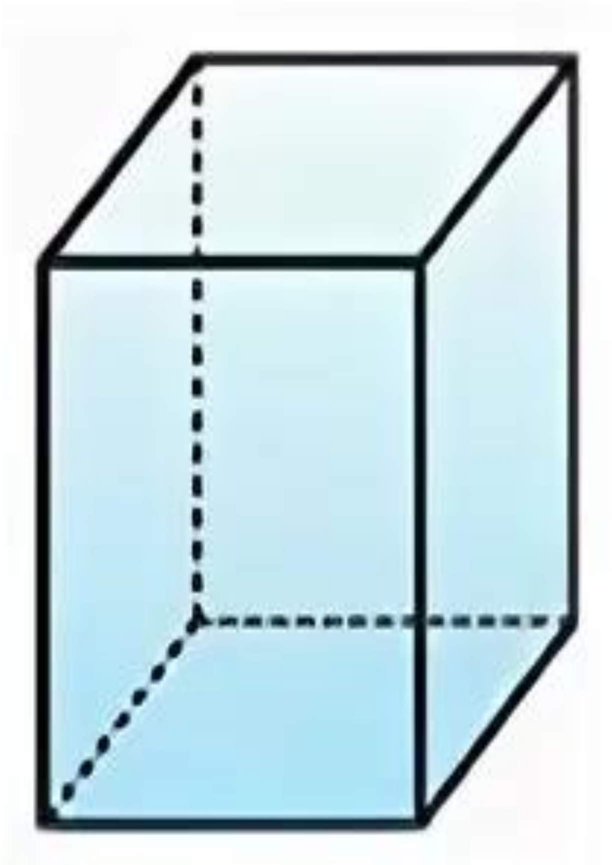
Поэтому максимальная площадь, которую можно огородить забором длиной 600 метров, будет

$S(150) = 150 \cdot 300 = 45000$ м^2=4,5 га

Ответ: 4,5 га

Задача 2

На территории строительной площадки необходимо разместить открытую емкость с водой, имеющую квадратное основание, которая должна вмещать 13,5 тонн воды. При каких размерах емкости на ее изготовление потребуется наименьшее количество металла?



Решение:

Форма емкости – форма прямоугольного параллелепипеда.

Общая площадь емкости состоит из площади нижнего основания и боковых поверхностей (4шт).

Основание квадратное, обозначим через $\boldsymbol{x}$ длину стороны основания.

Запишем формулу площади основания:

$$\boldsymbol{S = x^2}$$

Поскольку объем параллелепипеда равен площади основания, умноженной на высоту, получим следующую формулу:

$$\boldsymbol{V = S_{\text{осн}} \cdot h = x^2 \cdot h}$$

Из данной формулы, можем вывести формулу для расчета высоты емкости:

$$\boldsymbol{h = \frac{V}{x^2}}$$

Исходя из запроса на вместимость 13,5тонн воды, высоту можно выразить формулой:

$$h = \frac{V}{x^2} = \frac{13,5}{x^2}$$

Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна произведению периметра основания и высоты. Поскольку основание квадратное, запишем формулу:

$$S_{\text{бок}} = P \cdot h = 4x \cdot h$$

Обобщая вышеуказанное, получаем формулу расчета площади емкости:

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{13,5}{x^2} = x^2 + \frac{54}{x}$$

Применим правило нахождения наибольших и наименьших значения функции с помощью производной.

$$S'(x) = 2x - \frac{54}{x^2} = \frac{2x^3 - 54}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x^3-54}{x^2}=0 \quad \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} \quad 2x^3 - 54 = 0 \ \Longrightarrow$$

$$x^3 = 27 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$$

Получили, что сторона основания х=3м.

Подставив полученное значение в формулу расчета высоты:

$$\boldsymbol{h = \frac{13,5}{x^2} = \frac{13,5}{9} = 1,5} \text{ м}$$

Площадь поверхности:

$$\boldsymbol{S(x) = x^2 + \frac{54}{x} = 9 + 18 = 27} \ \text{м}^2$$

Ответ: площадь поверхности емкости 27 кв.м, сторона основания 3 м, высота 1,5 м

Задача 3 (№16 ЕГЭ)

В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 36 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $7t^2$ д. е. (денежных единиц). Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е.

Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание, то есть суточная зарплата и суточные накладные расходы, оказались наименьшими? Сколько денежных единиц в сумме при таком распределении составят все суточные затраты, то есть зарплата и накладные расходы?

Решение:

Пусть на строительстве первого дома будет работать *x* человек, тогда на строительстве второго дома — $(36 - x)$ человек, поскольку всего в бригаде всего 36 человек.

	1 дом	2 дом
Количество рабочих	x	36-x
Оплата	$7x^2$	$3(36-x)^2$

Пусть функция f(x) - зависимость затрат на оплату труда рабочих от количества рабочих на первом объекте.

$f(x) = 7x^2 + 3(36-x)^2$

$f(x) = 10x^2 - 216x + 3888$

$f(x) = 10x^2 - 216x + 3888$

$f'(x) = 20x - 216$

$20x - 216 = 0$

$X = 10,8$

По смыслу задачи x- натуральное, следовательно, проверяем ближайшие

$f(10) = 10 \cdot 102 - 216 \cdot 10 + 3888 = 2728$

$f(11) = 10 \cdot 112 - 216 \cdot 11 + 3888 = \underline{2722}$

Значит, минимальные суммарные суточные затраты составляют 2722 д.е.

Ответ: 11 рабочих на первый дом, 25 рабочих — на второй

Суточные затраты составят 2722 денежные единицы

Задача 4 (№16 ЕГЭ)

Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов, то они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на втором заводе — 200 рублей. Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих заводах?

Решение:

Пусть на первом заводе рабочие суммарно будут работать x^2 часов, тогда они произведут x единиц товара, а на заработную плату рабочим первого завода пойдёт $250x^2$ рублей. Пусть на втором заводе рабочие суммарно будут работать y^2 часов, тогда они произведут y единиц товара, а на заработную плату рабочим второго завода пойдёт $200y^2$ рублей. ($x \geq 0$; $y \geq 0$)

Завод	Количество часов в неделю	Количество единиц товара	Оплата труда (руб)
1	x^2	x	$250x^2$
2	y^2	y	$200y^2$
Сумма		$f(x, y) = x + y$	900000

$f(x, y)$ – функция количества единиц товара за неделю на двух заводах

$$250x^2 + 200y^2 = 900\,000$$

$$250x^2 + 200y^2 = 900\,000$$

$$y = \sqrt{4500 - \frac{5}{4}x^2}$$

$$\mathrm{f}(x) = x + \sqrt{4500 - \frac{5}{4}x^2}$$

$$\mathrm{f}'(x) = 1 + \frac{-\frac{5}{4}x}{2\cdot\sqrt{4500-\frac{5}{4}x^2}}$$

$$\mathrm{f}'(x) = 1 - \frac{\frac{5}{4}x}{\sqrt{4500-\frac{5}{4}x^2}}$$

$f'(x)=0;$ $\quad 1-\dfrac{\frac{5}{4}x}{\sqrt{4500-\frac{5}{4}x^2}}=0;$ $\quad \dfrac{\frac{5}{4}x}{\sqrt{4500-\frac{5}{4}x^2}}=1;$ $\quad \sqrt{4500-\frac{5}{4}x^2}=\frac{5}{4}x$

$$4500-\frac{5}{4}x^2=\frac{25}{16}x^2$$

$$\frac{45}{16}x^2=4500$$

$$x^2=1600$$

x	0<x<40	40	x>40
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↗		↘

$x=\pm 40$ *(- 40 не удовлетворяет условию задачи, т.к.* $x\geq 0;\ y\geq 0$ *)*

$x=40$ *- точка максимума функции*

$$f(40)=40+\sqrt{4500-\frac{5}{4}\cdot 1600}=40+50=90$$

Ответ: 90

Задача 5 (№16 ЕГЭ)

Строительство нового завода стоит 100 млн рублей. Затраты на производство x тысяч единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене q тысяч рублей за единицу, то прибыль в млн рублей за один год составит $qx - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, планируется выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении q строительство завода окупится не более чем за 4 года?

Решение:

Функция прибыли:

$$f=qx-(0,5x^2+x+7)$$

$$f=qx-0,5x^2-x-7$$

Найдем при каком *x* функция прибыли имеет максимальное значение:

$$f'=q-x-1$$

$$f'=0,\quad q-x-1=0$$

$$x=(q-1)$$

Так как строительство завода должно окупиться не более чем за 4 года, то прибыль за 4 года должна составить не менее 100 млн рублей. Следовательно, в год 25 млн рублей.

$$q(q-1)-0,5(q-1)^2-(q-1)-7\geq 25$$

Упростим неравенство:

$$\frac{1}{2}q^2 - q - 31{,}5 \geq 0$$

$$q^2 - 2q - 63 \geq 0$$

Решив неравенство, получим:

$$q \in (-\infty; -7] \cup [9; +\infty)$$

Отрицательные значения q не подходят по условию задачи.

Следовательно, наименьшее подходящее $q = 9$.

Ответ: 9.

Задача 6 (№16 ЕГЭ)

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение

	Количество рабочих	**Рабочее время каждого, ч**	**Время общее, чел/ч**	**Масса добытого металла, кг**		**Трудозатраты, чел/час**	
				алюминий	никель	алюминий	никель
I область	20	10	200	0,2	0,2		
II область	20	10	200	x	y	x^2	y^2

В каждой области в сутки может быть затрачено 200 человеко-часов труда. При этом в первой области будет добыто $0{,}2 \cdot 200 = 40$ кг металлов. Пусть в ней будет добыто y кг алюминия, тогда никеля будет добыто $(40 - y)$ кг. Пусть во второй области будет добыто x кг алюминия, тогда никеля будет добыто $\sqrt{200 - x^2}$ кг

Для производства сплава заводу необходимо получить равное количество алюминия и никеля, поэтому должно выполняться равенство

$$x + y = \sqrt{200 - x^2} + 40 - y \qquad (*)$$

Масса сплава будет равна сумме масс всех металлов:

$$m(x) = x + \sqrt{200 - x^2} + 40; \quad \left(0 \le x \le \sqrt{200}\right)$$

$$m'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{200 - x^2}} = \frac{\sqrt{200 - x^2} - x}{\sqrt{200 - x^2}}$$

$$m'(x) = 0$$

$$\sqrt{200 - x^2} - x = 0$$

$x = 10$ (точка максимума)

x	$\mathbf{0 \le x}$	**10**	$\mathbf{x \le \sqrt{200}}$
m´(*x*)	-	0	+
m(*x*)	$\boxed{\nearrow}$		$\boxed{\searrow}$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области.

При $x = 10,\ y = 20$

Таким образом, наибольшее значение функции m(x) равно

$$m(10) = 10 + \sqrt{200 - 10 \cdot 10} + 40 = 60,$$

Итак, всего будет добыто 30 кг алюминия и 30 кг никеля, из них будет произведено 60 кг сплава.

Ответ: 60 кг.

Подведение итогов: значимость изучения производной

Изучение производной критично для инженерии и математики. Она помогает анализировать быстро меняющиеся процессы и их влияние друг на друга. В инженерных задачах производная используется для оценки напряжений, скоростей, оптимизации конструкций и управления динамическими системами. Она развивает аналитические навыки и связывает теорию с практикой. В итоге, уверенное использование производной делает инженера более ценным специалистом, способным решать сложные задачи и улучшать эффективность разработки.