Краевой семинар по теме:
«Опыт преподавания математики в соответствии с ФГОС ООО, ФГОС СОО. В лабиринте педагогических идей»

Задачи по теории вероятностей. От идеи к решению

Довженко Наталья Витальевна,
учитель математики
МБОУ лицей №4 им. профессора Е.А.Котенко г.Ейска

17 сентября 2025 года

Основные необходимые знания для решения задач

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Произошли оба события А и В

Вероятность того, что произойдет одно из двух несовместных событий (все равно какое) равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Произошло событие А или В

«Труден лишь первый шаг».

Марк Тере́нций Варро́н

римский учёный и писатель

(116в до н.э. – 27в до н.э.)

«Личность существует,

пока мыслит».

Рене Декарт

французский математик и философ

(1596 –1650г.г.)

ЗАДАЧА №1

Стрелок в тире стреляет по мишени из одного и того же револьвера до тех пор, пока не поразит её. Вероятность поражения при каждом выстреле, равна 0,25. Сколько патронов надо дать стрелку, чтобы он поразил мишень с вероятностью не менее 0,65.

Решение. Так как стрелок поражает мишень при каждом выстреле с вероятностью 0,25, то он не поражает мишень при каждом выстреле с вероятностью $1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Отсюда, применяя формулу вероятности пересечения событий, получаем, что стрелок не поражает мишень при k выстрелах с вероятностью $0{,}75^k$.

Значит, он поражает мишень при k выстрелах с вероятностью $1 - 0{,}75^k = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Так как стрелок стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит мишень с вероятностью не менее 0,65, то надо найти такое наименьшее k, при котором $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k \geqslant 0{,}65$.

При $k = 1$, $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{1}{4} = 0{,}25 < 0{,}65$.

При $k = 2$, $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} = 0{,}4... < 0{,}65$.

При $k = 3$, $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 0{,}5... < 0{,}65$.

При $k = 4$, $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} = 0{,}68... > 0{,}65$.

$$\left.\begin{aligned} P(+) &= \frac{1}{4} = \frac{4}{16} = \frac{16}{64} \\ P(-+) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{16} = \frac{12}{64} \\ P(--+) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{64} \end{aligned}\right\} \frac{37}{64} \approx 0{,}58$$

$$P(---+) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{256}$$

$$\frac{37}{64} + \frac{27}{256} = \frac{175}{256} \approx 0{,}68$$

ЗАДАЧА №2. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 850 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше 780 г, равна 0,86. Найдите вероятность того, что масса буханки хлеба окажется больше 780, но меньше 850 г.

Согласно определению, $\overline{A}$ обозначает событие «масса m буханки хлеба окажется не меньше 850 г», а $\overline{B}$ обозначает событие «масса m буханки хлеба окажется не больше 780 г».

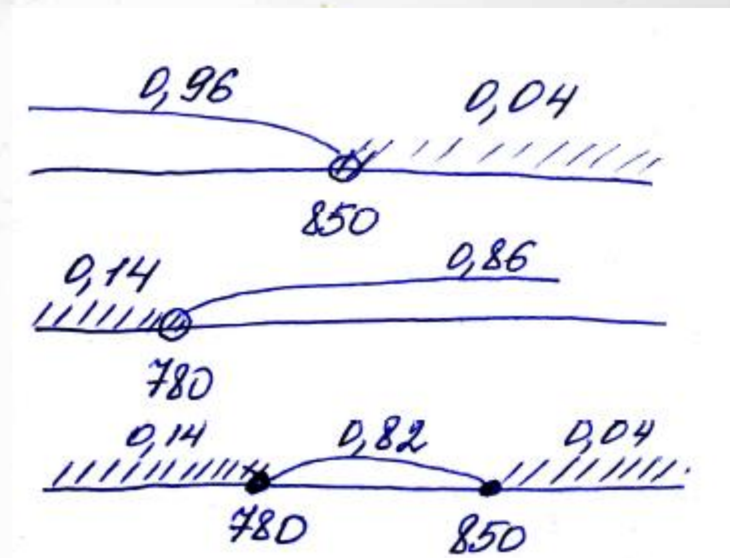
Заметим, что $\overline{B} \cup C \cup \overline{A}$ — истинное событие, так как при взвешивании буханки возможен один из трёх исходов $\overline{B}$, C и $\overline{A}$, и другие исходы невозможны.

$m \leqslant 780$	$780 < m < 850$	$m \geqslant 850$
$\overline{B}$	C	$\overline{A}$

Поэтому $P(\overline{B} \cup C \cup \overline{A}) = 1$. Заметим, что $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}86 = 0{,}14$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$.

По формуле вероятности объединения событий получаем:

$$1 = P(\overline{B} \cup C \cup \overline{A}) = P(\overline{B}) + P(C) + P(\overline{A}) =$$
$$= 0{,}14 + P(C) + 0{,}04,\ P(C) = 1 - 0{,}14 - 0{,}04 = 0{,}82.$$



ЗАДАЧА №3 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,35. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

По формуле вероятности пересечения произвольных событий получаем:

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Событие $\overline{A} \cup \overline{B}$ — «Кофе останется либо в первом автомате, либо во втором автомате» является отрицанием того, что кофе закончится в обоих автоматах.

Поэтому $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$. По условию $P(A \cap B) = 0{,}18$.

Значит, $P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$. Отсюда

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}65 + 0{,}65 - 0{,}82 = 0{,}48$.

		Т	
		+	−
П	+	0,48	0,17
	−	0,17	0,18

Т₋ П₋

$0{,}35 \cdot 0{,}35 \neq 0{,}18$

ЗАДАЧА №4 У Тимофея есть два игральных кубика. Первый обычный, а на гранях второго кубика число 6 изображено ровно три раза, а на остальных гранях число 5. В остальном кубики одинаковы. Тимофей наудачу выбрал один из кубиков и бросил его два раза. Известно, что оба раза выпала цифра 6. Какова вероятность того, что он бросил второй кубик?

Понятно, что если он выбрал первый кубик, то оба раза выпадет цифра 6 в единственном случае, когда и при первом, и при втором бросании выпадет 6. Исходом эксперимента является пара (6; 6).

Если же он выбрал второй кубик, то для подсчёта числа исходов при его бросании два раза обозначим красным — к, зелёным — з и синим — с те три грани, на которых располагаются числа 6. Число все пар, составленных из шестёрок, расположенных на гранях трёх цветов, равно $3^2 = 9$:

$(6_к; 6_к), (6_к; 6_з), (6_к; 6_с),$
$(6_з; 6_к), (6_з; 6_з), (6_з; 6_с),$
$(6_с; 6_к), (6_с; 6_з), (6_с; 6_с).$

Тем самым получаем 10 исходов эксперимента, из которых 9, благоприятствуют событию A. Согласно классическому определению вероятности события, получаем, что $P(A) = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

1 кубик 1; 2; 3; 4; 5; 6
$6^2 = 36$ исходов
$p(6;6) = \frac{1}{36}$

2 кубик 6; 6; 6; 5; 5; 5
$2^2 = 4$ исхода
$p(6;6) = \frac{1}{4}$

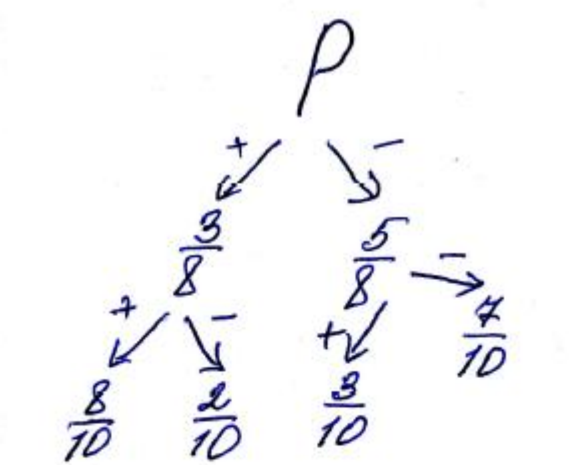
$$\frac{p(2\ \text{кубик})}{\text{общую вер}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{36}} = \frac{1}{4} : \frac{10}{36} = 0{,}9$$

ЗАДАЧА №5 Ковбой Пит попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Пит стреляет из не пристрелянного револьвера, то попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежат 8 револьверов, из которых только 3 пристрелянные. Ковбой видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Пит промахнётся.

Так как револьверов всего 8 и три из них пристреляны, то наудачу пристрелянный револьвер он хватает с вероятностью $\frac{3}{8}$ и при этом промахивается с вероятностью $1-0{,}8=0{,}2$. По формуле вероятности пересечения событий, он промахивается в таком случае с вероятностью $\frac{3}{8}\cdot 0{,}2=\frac{6}{80}$.

Аналогично, если он хватает наудачу не пристрелянный револьвер (с вероятностью $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$) и промахивается с вероятностью $1-0{,}3=0{,}7$, то вероятность промаха равна $\frac{5}{8}\cdot 0{,}7=\frac{35}{80}$.

По формуле вероятности объединения событий получаем, что вероятность промаха равна $\frac{6}{80}+\frac{35}{80}=\frac{41}{80}=0{,}5125$.



$$\frac{6}{80}+\frac{35}{80}=\frac{41}{80}=0{,}5125$$

ЗАДАЧА №6 Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Анализ пациента может быть положительным по двум причинам:

а) пациент болеет гепатитом, его анализ верен;

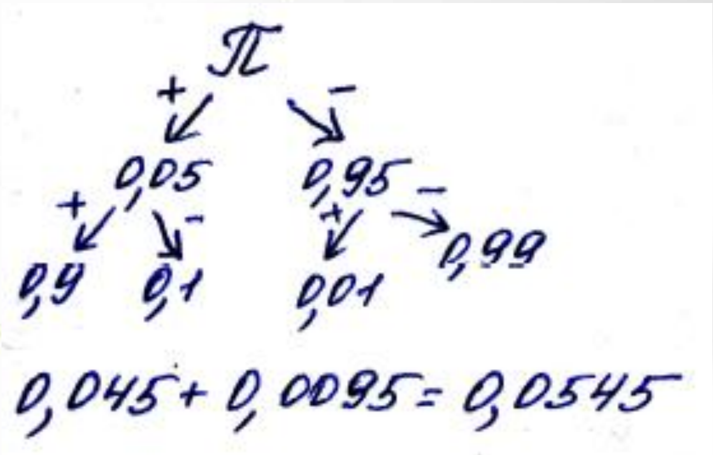
б) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен.

Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

$P(A) = 0,9 \cdot 0,05 = 0,045,$

$P(B) = 0,01 \cdot 0,95 = 0,0095,$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,045 + 0,0095 = 0,0545.$

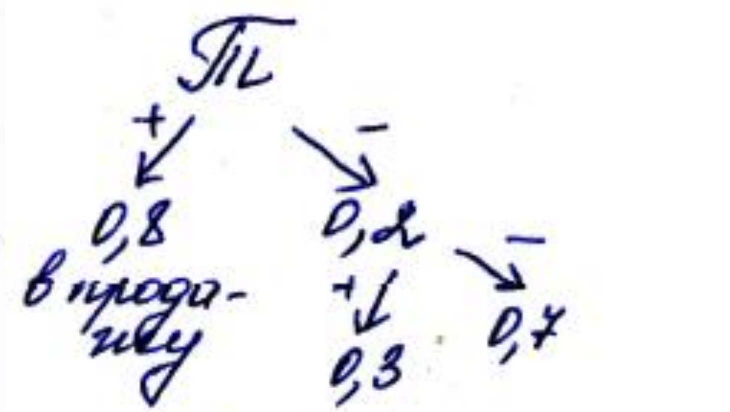


ЗАДАЧА №7 На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Пусть завод произвел х тарелок. Качественных тарелок 0,8х (80% от общего числа), они поступят в продажу. Дефектных тарелок 0,2х, из них в продажу поступает 30%, то есть $0,3 \cdot 0,2x = 0,06x$.

Всего в продажу поступило $0,8x + 0,06x = 0,86x$ тарелок. Вероятность купить качественную тарелку равна:

$$\frac{0,8x}{0,86x} = \frac{40}{43} \approx 0,93$$



$$\frac{0,8}{0,8+0,06} = \frac{0,8}{0,86} \approx 0,93$$

ЗАДАЧА №8 В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты окажутся в разных карманах.

Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать 3 способами: 5,10,10; 10,5,10; 10,10,5.

Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

2/6 * 4/5 * 3/4 + 4/6 * 2/5 * 3/4 + 4/6 * 3/5 * 2/4 = 3/5 = 0,6

5 5 10 → 5 10 10

10 10 10

$\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

10 5

$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

10 5 10

$\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}6$

ЗАДАЧА №9

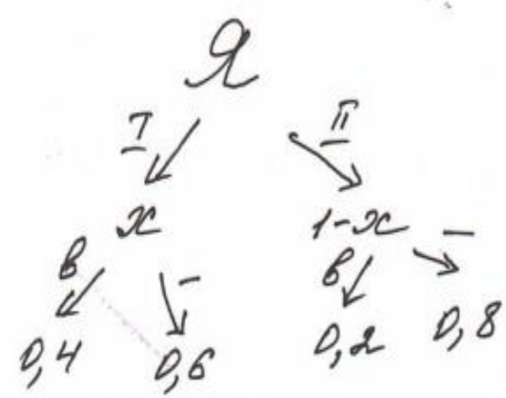
Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение.
Пусть событие состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события и состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события и — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна:

$$P(AB_1) + P(AB_2) = P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2) =$$
$$= 0,4\cdot P(B_1) + 0,2\cdot(1 - P(B_1)) = 0,2P(B_1) + 0,2.$$

Поскольку по условию эта вероятность равна 0,35, поэтому для вероятности того, что купленное яйцо произведено в первом хозяйстве имеем:

$$P(B_1) = (0,35 - 0,2) : 0,2 = 0,75.$$



$$0,4x + 0,2(1-x) = 0,35$$
$$0,2x = 0,15$$
$$x = 0,75$$

Приведем другое решение.
Пусть в первом хозяйстве агрофирма закупает x яиц, в том числе, $0,4x$ яиц высшей категории, а во втором хозяйстве — y яиц, в том числе $0,2y$ яиц высшей категории. Тем самым, всего агроформа закупает $x+y$ яиц, в том числе $0,4x + 0,2y$ яиц высшей категории. По условию, высшую категорию имеют 35% яиц, тогда:

$$\frac{0,4x + 0,2y}{x+y} = 0,35 \Leftrightarrow 0,4x + 0,2y = 0,35(x+y) \Leftrightarrow 0,05x = 0,15y \Leftrightarrow x = 3y.$$

Следовательно, у первого хозяйства закупают в три раза больше яиц, чем у второго. Поэтому вероятность того, что купленное яйцо окажется из первого хозяйства равна

$$\frac{3y}{3y+y} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

ЗАДАЧА №10

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов —математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов —математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

- **Решение.**
- Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, З. нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть *A*, *B*, *C* и *D* — это события, в которых З. сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Тогда поскольку

$$P(C+D)=P(C)+P(D)-P(C\cdot D),$$

для вероятности поступления имеем:

$$P(AB(C+D))=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C+D)=P(A)\cdot P(B)\cdot(P(C)+P(D)-P(C)\cdot P(D))$$
$$=0,6\cdot 0,8\cdot(0,7+0,5-0,7\cdot 0,5)=0,408.$$

ЗАДАЧА №10

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов —математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов —математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

$\text{М}_+ = 0{,}6 \qquad \text{м}_- = 0{,}4$

$\text{р}_+ = 0{,}8 \qquad \text{р}_- = 0{,}2$

$\text{и}_+ = 0{,}7 \qquad \text{и}_- = 0{,}3$

$\text{о}_+ = 0{,}5 \qquad \text{о}_- = 0{,}5$

$\text{Л}_+\text{К}_+ \quad \text{м}_+\text{р}_+\text{и}_+\text{о}_+ = 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5 = 0{,}168$

$\text{Л}_+\text{К}_- \quad \text{м}_+\text{р}_+\text{и}_+\text{о}_- = 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5 = 0{,}168$

$\text{Л}_-\text{К}_+ \quad \text{м}_+\text{р}_+\text{и}_-\text{о}_+ = 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5 = 0{,}072$

$0{,}168 + 0{,}168 + 0{,}072 = 0{,}408$

«Математика- царица всех наук.
Её возлюбленный-истина,
её наряд- простота и ясность.
Дворец этой владычицы окружен
тернистыми зарослями, и,
чтобы достичь его, каждому
приходится пробираться сквозь чащу.
Случайный попутчик не обнаружит во дворце
ничего привлекательного. Красота его
открывается лишь разуму, любящему истину,
закалённому в борьбе с трудностями»

Ян Снядецкий
(1756– 1830г.г.)

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!!!