



РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОЙСТВ ВХОДЯЩИХ В НИХ ФУНКЦИЙ

Старший преподаватель
кафедры МИТО ГБОУ ИРО
Краснодарского края
Власова Александра Анатольевна



Использование понятия области определения функции

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной x , при которых функция имеет смысл.

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — элементарные функции, определенные на множествах D_1 , D_2 . Тогда *областью D допустимых значений* уравнения будет множество, состоящее из тех значений x , которые принадлежат обоим множествам, то есть $D = D_1 \cap D_2$. Ясно, что когда множество D пустое ($D = \emptyset$), то уравнение решений не имеет.

Пример $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-3} = 5$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$ решений нет.



Пример $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = x^2 - 1.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=1.$

ОДЗ состоит из одной точки $x = 1$. Остается проверить, является ли $x = 1$ корнем уравнения. $x=1 \Rightarrow \sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} = 1-1, 0 = 0$. Верно.

Ответ: 1.



Пример $\sqrt{4 - 4x + x^2} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = x - 2.$

Решение. 1. $|x - 2| + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = x - 2.$

2. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то $x - 2 \geq 0.$

3. $x \geq 2 \Rightarrow |x - 2| = x - 2.$

4. $x - 2 + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = x - 2, \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 0, x_1 = 1, x_2 = 4.$

С учетом того, что $x \geq 2$, корнем уравнения является $x = 4.$

Ответ: 4.



Пример $|x| + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1.$

Решение. 1. Область определения левой части: $|x| \geq 1$.

2. Для любого x из области определения выполняется неравен-

ство $|x| + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1.$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$



Пример $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} + x > 4.$

Решение. 1. Область определения левой части: $|x| > 3$.

2. При $x < -3$ левая часть неравенства отрицательна.

3. Для любого $x > 3$ выполняется неравенство $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 - 9}} > 1$

То есть $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} + x > 4.$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.



Использование понятия области значений функции

Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной y при допустимых значениях переменной x .

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на данном промежутке (содержащемся в области ее определения), если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, имеет место неравенство $|f(x)| < N$.



Использование свойства ограниченности.

Теорема 1. Если для любого $x \in X$ выполняются неравенства $f(x) \leq A$,
 $g(x) \geq A$, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Иными словами, если $\max_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} g(x) = A$, то уравнение $f(x) = g(x)$ на множестве X равносильно системе $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Теорема 2. Пусть требуется решить уравнение $f(x; y) = \varphi(x; y)$, где $(x; y) \in D$.

Если на D выполняются неравенства $f(x; y) \leq A$, $\varphi(x; y) \geq A$, то на множестве D уравнение $f(x; y) = \varphi(x; y)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x; y) = A, \\ \varphi(x; y) = A. \end{cases}$$



Пример $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 2.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0, \\ x+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$ $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} \geq 3 \Rightarrow$ решений нет.



Пример $\left(\frac{4}{3}\right)^x = -2x^2 + 6x - 9.$

Решение. Область допустимых значений уравнения есть множество всех действительных чисел. Показательная функция

$f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ принимает только положительные значения, а функция

$g(x) = -2x^2 + 6x - 9$ — только отрицательные значения. Множества значений этих функций не имеют общих элементов, и, следовательно, уравнение решений не имеет.



Пример $\frac{3}{\pi} \arccos(x-1) = 3 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}.$

Решение. По определению, $0 \leq \arccos(x-1) \leq \pi$ для допустимых

значений x , следовательно, $0 \leq \frac{3}{\pi} \arccos(x-1) \leq 3$.

$3 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2} \geq 3$ для допустимых значений x .

Равенство достигается, если $\begin{cases} \frac{3}{\pi} \arccos(x-1) = 3, \\ 3 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2} = 3. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$\arccos(x-1) = \pi, x-1 = -1, x = 0.$$

При $x = 0$ второе уравнение обращается в верное числовое равенство.

Следовательно, решением системы и уравнения является $x = 0$.

Ответ: 0.



Пример $\cos 2\pi x = x^2 - 8x + 17.$

Решение. $\cos 2\pi x = (x - 4)^2 + 1.$ $-1 \leq \cos 2\pi x \leq 1,$ $(x - 4)^2 + 1 \geq 1.$

Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ (x - 4)^2 + 1 = 1. \end{cases}$

Решая второе уравнение системы, получаем $x = 4.$ Подстановкой убеждаемся, что найденный корень является решением и первого уравнения системы. Следовательно, $x = 4$ — решение системы.

Ответ: 4.



Пример $3^{\left| \frac{x-1}{4} \right| + 2} = 5 + 4 \sin 2\pi x.$

Решение. Оценим левую и правую части уравнения.

1. $\left| x - \frac{1}{4} \right| + 2 \geq 2 \Rightarrow 3^{\left| \frac{x-1}{4} \right| + 2} \geq 9.$

2. $-1 \leq \sin 2\pi x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4 \sin 2\pi x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq 5 + 4 \sin 2\pi x \leq 9.$

3. Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases} 3^{\left| \frac{x-1}{4} \right| + 2} = 9, \\ 5 + 4 \sin 2\pi x = 9. \end{cases}$

4. Из первого уравнения системы находим $x = \frac{1}{4}$. Подстановкой

убеждаемся, что найденный корень является решением и второго

уравнения системы. Следовательно, $x = \frac{1}{4}$ – решение системы и корень исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{4}.$



Пример $2^{x^2-4x+5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4}$.

Оценим левую и правую части уравнения.

1. $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 2^{(x-2)^2+1} \geq 2$.

2. $0 \leq \sin^2 \frac{\pi x}{4} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4} \leq 2$.

3. Следовательно, равенство достигается, если

$$\begin{cases} 2^{(x-2)^2+1} = 2, \\ 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4} = 2. \end{cases}$$

4. Из первого уравнения системы находим $x = 2$. Подстановкой убеждаемся, что найденный корень является решением и второго уравнения системы. Следовательно, $x = 2$ – решение системы и корень исходного уравнения.

Ответ: 2.



Использование свойства монотонности функции

Функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на данном числовом промежутке X , если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$, то есть для любых x_1 и x_2 из промежутка X таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется *монотонной* на этом промежутке.



Теорема 1. Монотонная на промежутке X функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента из этого промежутка.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X и функция $g(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X , то функция $h(x) = f(x) + g(x) + C$ также возрастает (убывает) на промежутке X (C — произвольная постоянная).

Теорема 3. Если функция $f(x)$ неотрицательна и возрастает (убывает) на промежутке X , функция $g(x)$ неотрицательна и возрастает (убывает) на промежутке X , $C > 0$, то функция $h(x) = C \cdot f(x) \cdot g(x)$ также возрастает (убывает) на промежутке X .



Теорема 4. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X , то функция $-f(x)$ убывает (возрастает) на этом промежутке.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X и со-

храняет на этом множестве знак, то функция $\frac{1}{f(x)}$ на промежутке X имеет противоположный характер монотонности.

Теорема 6. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастающие или обе убывающие, то функция $h(x) = f(g(x))$ — возрастающая функция. Если одна из функций возрастающая, а другая убывающая, то $h(x) = f(g(x))$ — убывающая функция.



Использование свойства монотонности.

Теорема 1. Если на промежутке X одна из функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ убывает, а другая возрастает, то на этом промежутке X уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня, то есть либо имеет только один корень (рис. 1), либо вообще не имеет корней (рис. 2)

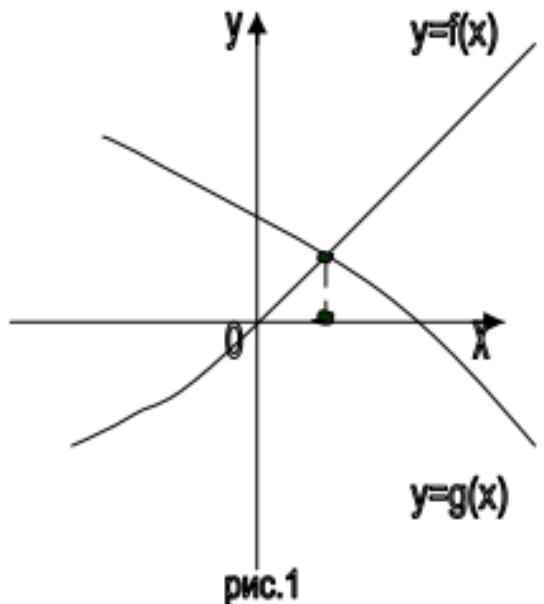


рис.1

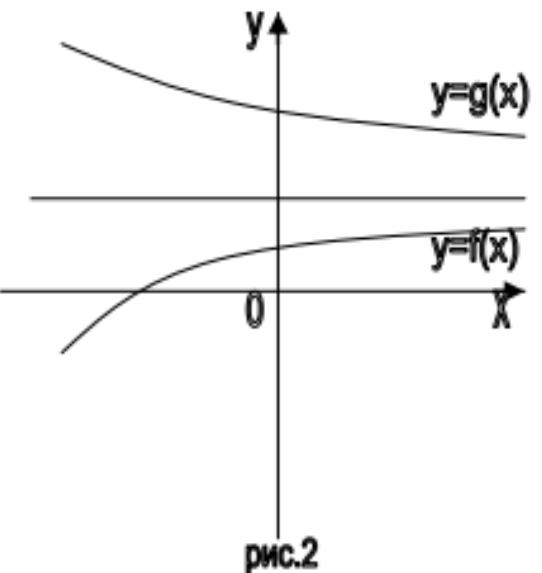


рис.2



Теорема 2. Если на промежутке X функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то на этом промежутке X уравнение $f(x) = C$, где $C = \text{const}$, имеет не более одного корня, то есть либо имеет только один корень (рис.3), либо вообще не имеет корней (рис.4).

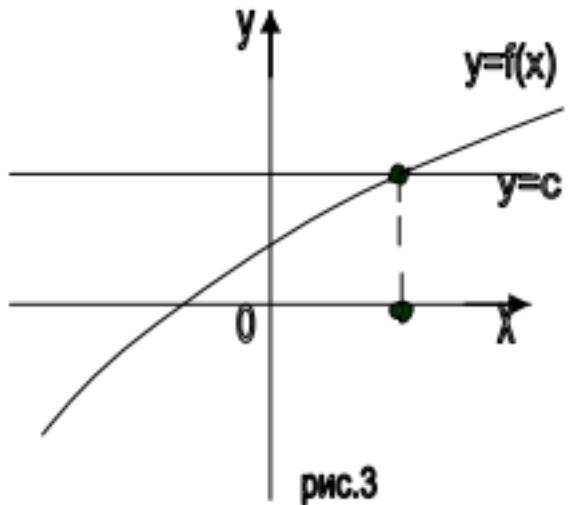


рис.3

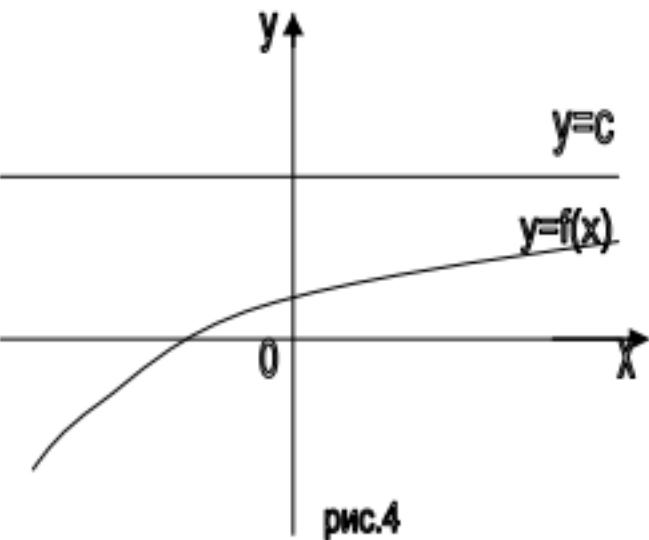


рис.4



Пример $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Преобразуем: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Левая часть уравнения

является убывающей функцией. Следовательно, она может принимать значение 1 не более чем в одной точке (теорема 7). Подбором находим, что $x = 2$.

Ответ: 2.



Пример $\arcsin x = \frac{\pi}{3} \cdot (1 - x).$

Решение. 1. Функция $f(x) = \arcsin x$ возрастает на $[-1; 1]$; функция $g(x) = \frac{\pi}{3}(1 - x)$ убывает на этом отрезке.

2. Подбором находим, что $x = 0,5$.
3. В силу справедливости теоремы 10 утверждаем, что $x = 0,5$ единственный корень уравнения.

Ответ: 0,5.



Пример $\log_2(8 - x) \leq 3x - 10.$

Решение. 1. ОДЗ: $x < 8$.

2. При $x = 4$ левая и правая части равны.

3. Так как левая часть — убывающая функция, а правая — возрастающая, то неравенству удовлетворяют $x \geq 4$.

4. С учетом ОДЗ имеем: $4 \leq x < 8$.

Ответ: $x \in [4; 8)$.



Использование свойств четности или нечетности функций

Функция $f(x)$ называется *четной*, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.



Теорема 1. Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций являются четными функциями.

Теорема 2. Произведение и частное двух нечетных функций представляют собой четные функции.

Пусть имеем уравнение или неравенство $F(x) = 0$, $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$), где $F(x)$ — четная или нечетная функция.

а) Чтобы решить уравнение $F(x) = 0$, где $F(x)$ — четная или нечетная функция, достаточно найти положительные (или отрицательные) корни, после чего записываются отрицательные (или положительные) корни, симметричные полученным, и для нечетной функции корнем будет $x = 0$, если это значение входит в область определения $F(x)$. Для четной функции значение $x = 0$ проверяется непосредственной подстановкой в уравнение.



Может ли при каком-нибудь значении а уравнение

$$2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5 \text{ иметь } 5 \text{ корней?}$$

Решение. Обозначим $f(x) = 2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 - 5$. $f(x)$ – функция четная, поэтому, если x_0 – корень данного уравнения, то $-x_0$ – тоже. $x = 0$ не является корнем данного уравнения ($0 \neq 5$). Следовательно, число корней у этого уравнения при любом действительном a четно, поэтому 5 корней оно иметь не может.

Ответ: не может.



**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!**