Качественная подготовка к ЕГЭ как основа успешного обучения в вузе

Задорожная Ольга Владимировна

Доцент кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края

Школьные предметы	Предметы высшей школы
Алгебра Геометрия Вероятность и статистика	Математический анализ Аналитическая геометрия Высшая алгебра Теория функций комплексного переменного Дифференциальные уравнения Теория вероятностей Математическая статистика …

Раздел школьной математики: геометрия

ЕГЭ: № 14

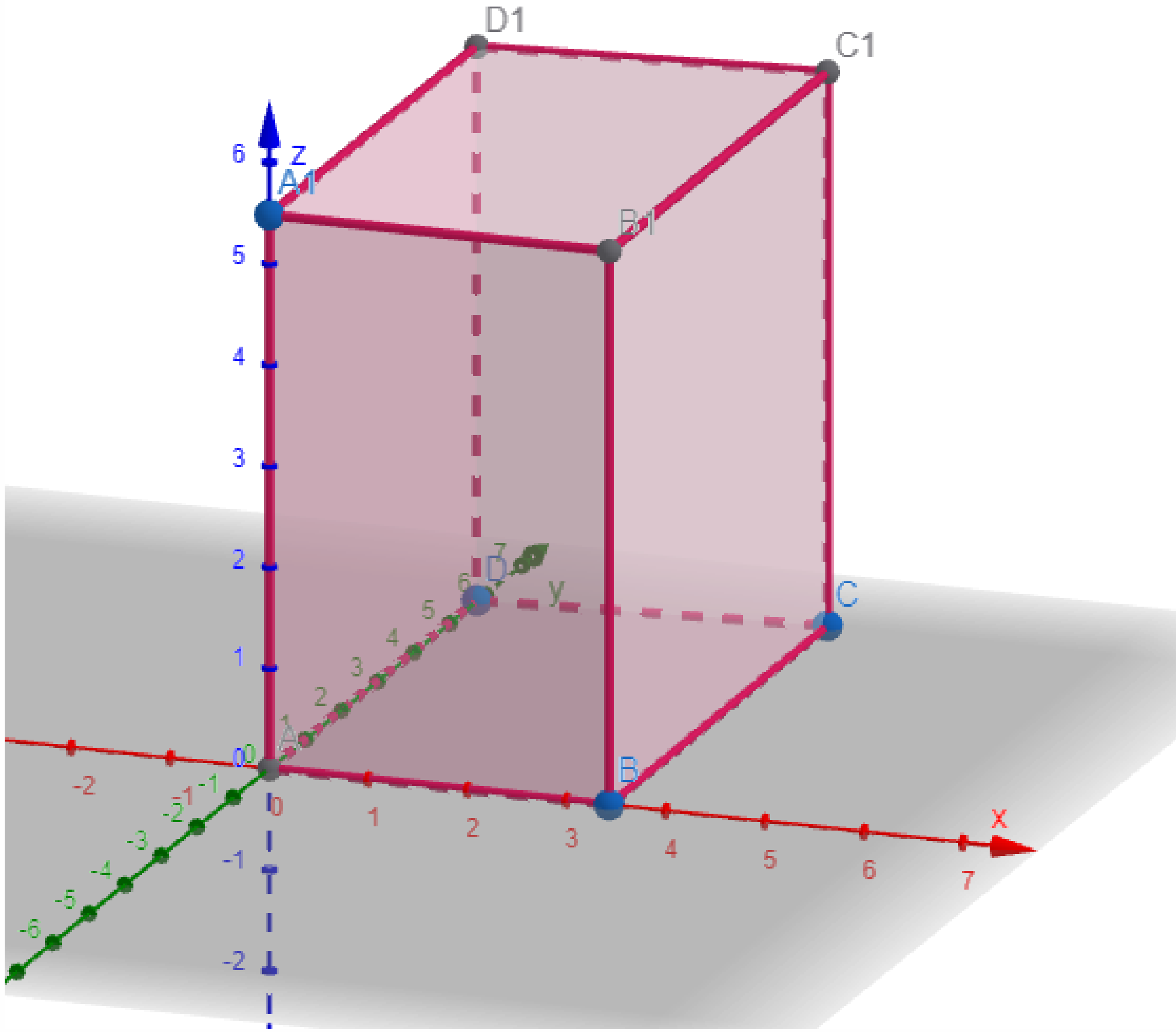
Раздел высшей математики: векторная алгебра

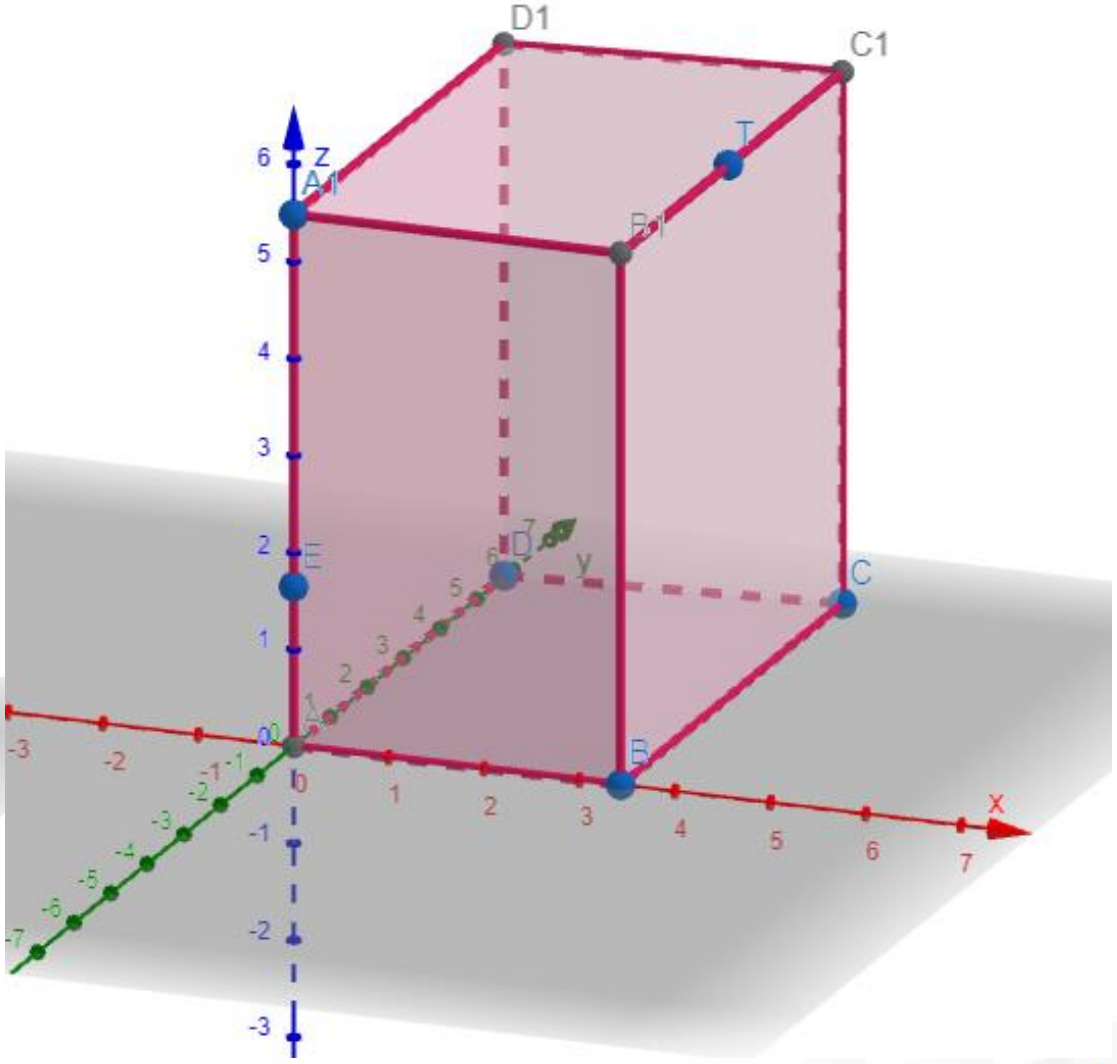
На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D$ взята точка E так, что $A_1E : EA=5:2$. Точка T – середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 является трапецией.

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$, если известно, что $AB=3\sqrt{2}$, АD=4, AA_1=14.

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5:2$. Точка T – середина ребра B_1C_1.



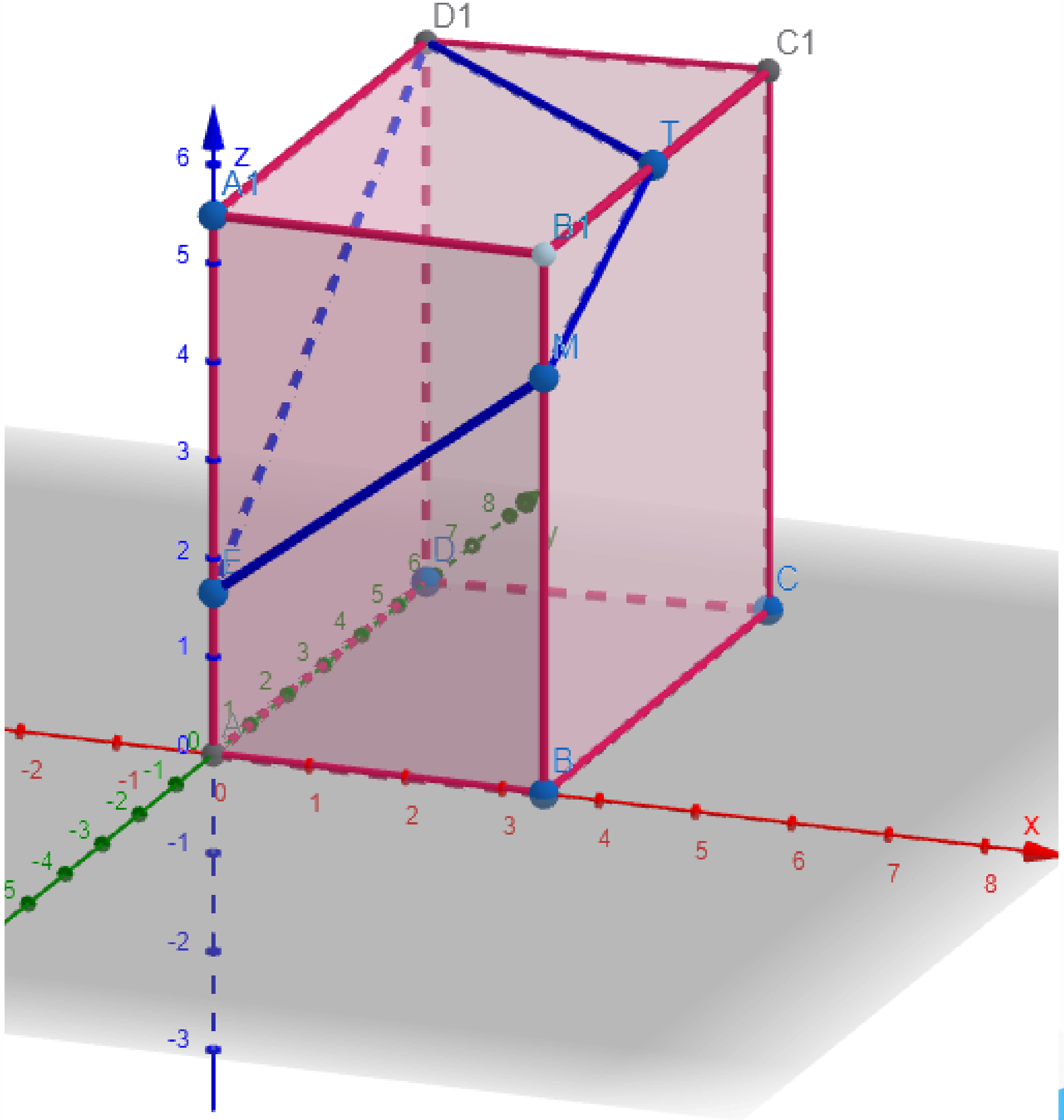


Ось OX вдоль AB, ось OY вдоль AD, ось OZ вдоль AA_1. Пусть $AB=m$, $AD=2k$, $AA_1=7p$.

$A(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $C(m;2k;0)$, $D(0;2k;0)$

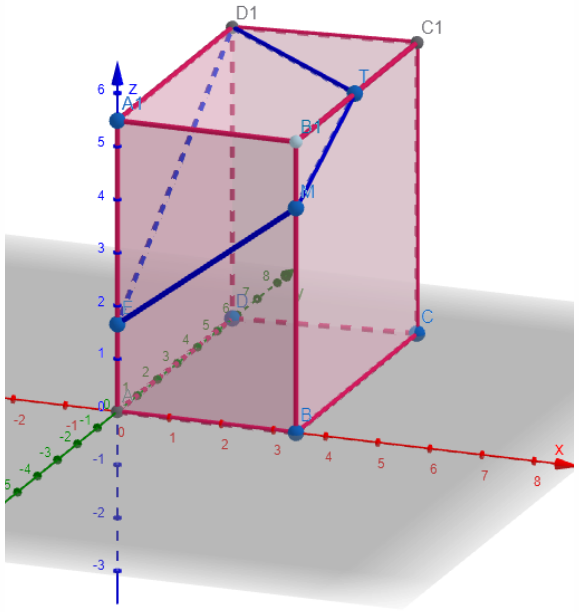
$A_1(0;0;7p)$, $B_1(m;0;7p)$, $C_1(m;2k;7p)$, $D_1(0;2k;7p)$

$E(0;0;2p)$, $T(m;k;7p)$



Найдем уравнение плоскости ETD_1

$$ETD_1: \frac{5}{4m}x + \frac{5}{4k}y - \frac{1}{2p}z + 1 = 0$$



Уравнение прямой в пространстве

Определение. Любую прямую на плоскости можно задать уравнением $Ax+By+C=0$, где A, B и C – действительные числа, причём из чисел A и B хотя бы одно должно быть отлично от нуля.

Общее уравнение прямой

Прямую можно определить как линию пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой

Любой ненулевой вектор $\bar{a}(m,n,l)$, параллельный данной прямой, называется направляющим вектором прямой.

Пусть дана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащая на прямой, и направляющий вектор прямой $\bar{a}(m,n,l)$. Тогда канонические уравнения прямой будут иметь вид:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{l}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = lt + z_0 \end{cases}$$

$B(m;0;0),\ B_1(m;0;7p)$

Уравнение прямой BB_1

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = lt + z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0t + m \\ y = 0t + 0 \\ z = 7pt + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m \\ y = 0 \\ z = 7pt \end{cases}$$

Точка пересечения плоскости ETD_1 и прямой BB_1

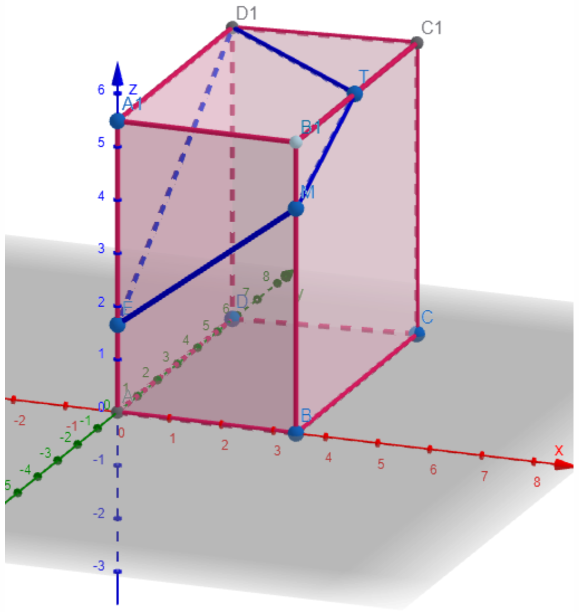
$$\frac{5}{4m}x + \frac{5}{4k}y - \frac{1}{2p}z + 1 = 0 \quad и \quad \begin{cases} x = m \\ y = 0 \\ z = 7pt \end{cases}$$

$$M\left(m; 0; \frac{9}{14} \cdot 7p\right) = M\left(m; 0; \frac{9p}{2}\right)$$

Проверяется параллельность прямых ED_1 и MT.

$E(0;0;2p)$, $D_1(0;2k;7p)$: $\overline{ED_1}\left(0;2k;5p\right)$

$M\left(m;0;\dfrac{9p}{2}\right)$, $T(m;k;7p)$: $\overline{MT}\left(0;k;\dfrac{5p}{2}\right)$



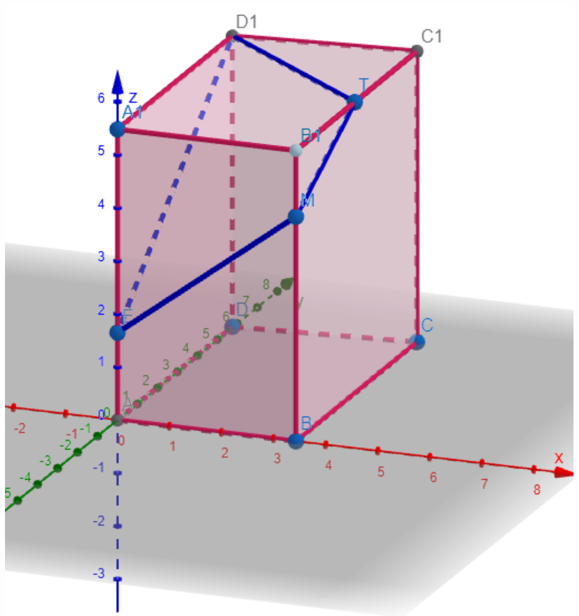
$$0\cdot t=0$$

$$k\cdot t=2k$$

$$\frac{5p}{2}\cdot t=5p$$

$$t=2$$

Проверим не параллельность прямых EM и D_1T.



$$\overline{EM}\left(m;0;\frac{5p}{2}\right),\ \overline{D_1T}(m;-k;0)$$

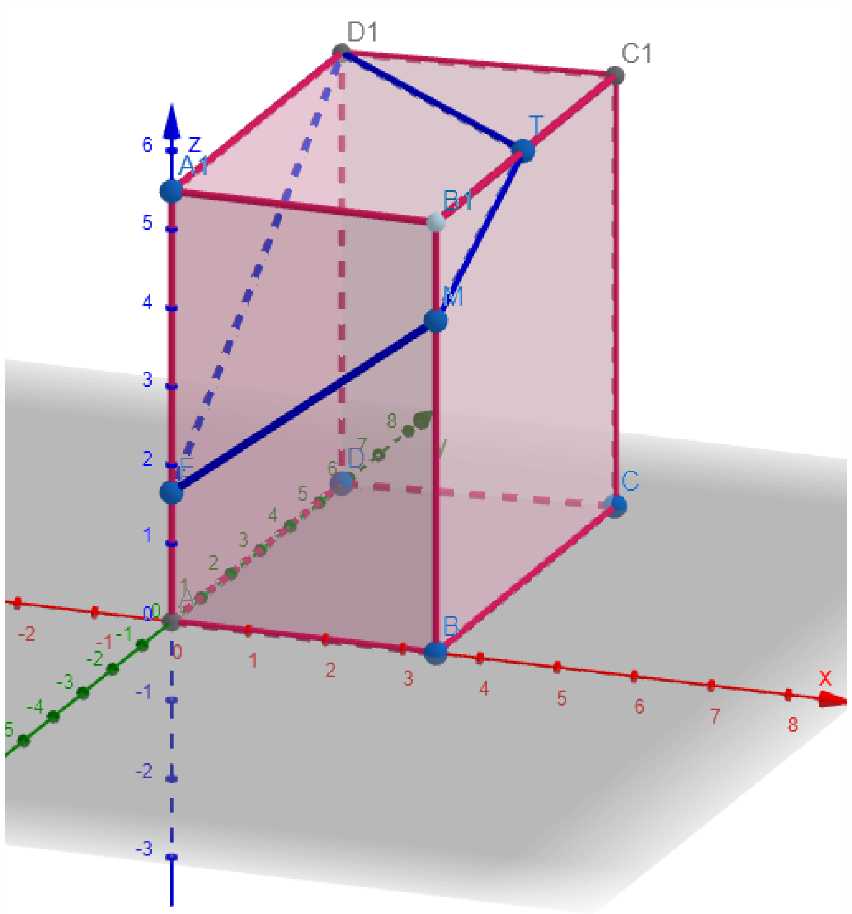
$$m\cdot t=m$$

$$0\cdot t=-k$$

$$\frac{5p}{2}\cdot t=0$$

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$, если известно, что $AB=3\sqrt{2}$, $AD=4$, $AA_1=14$.

$m=3\sqrt{2}$, $2k=4$, значит, $k=2$, $7p=14$, значит, $p=2$.



Уравнение плоскости $ETD_1: \dfrac{5}{4m}x + \dfrac{5}{4k}y - \dfrac{1}{2p}z + 1 = 0$

$$\frac{5}{12\sqrt{2}}x + \frac{5}{8}y - \frac{1}{4}z + 1 = 0$$

$$10x + 15\sqrt{2}y - 6\sqrt{2}z + 24\sqrt{2} = 0$$

Вектор нормали $\overline{n_1}\left(10;15;-6\sqrt{2}\right)$

Уравнение плоскости $A_1B_1C_1$: $z=7p=14$

Вектор нормали $\overline{n_2}\left(0;0;14\right)$

$$\cos\delta = \frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|_2} = -\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{622}}$$

$$\cos\gamma = \cos(180^0 - \delta) = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{622}}$$

Раздел школьной математики: алгебра
ЕГЭ: № 19
Раздел высшей математики: математический анализ, теория чисел

Пример. Вычислить

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$$

Теорема. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

- **Монотонная последовательность**

— это последовательность, элементы которой либо неубывают (возрастают или остаются равными), либо невозрастают (убывают или остаются равными).

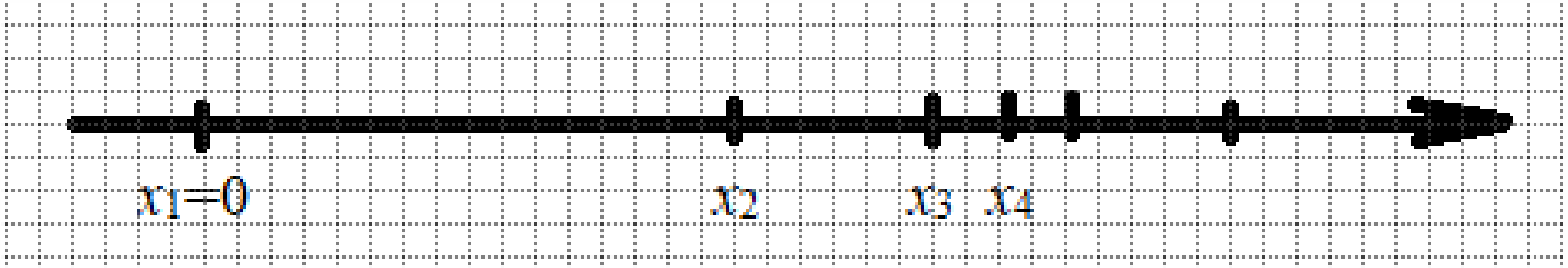
- **Ограниченная последовательность**

— это последовательность, все элементы которой находятся в пределах некоторого интервала, то есть не стремятся к бесконечности.

- **Сходящаяся последовательность**

— это последовательность, которая имеет конечный предел

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$



Пример. Вычислить $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$

Зададим последовательность рекуррентным способом

$$a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+a_1},\ a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2+a_2}$$

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

Методом математической индукции можно доказать ограниченность и возрастание

Тогда по теореме последовательность (a_n) имеет предел.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n}$$

$$a = \sqrt{2 + a}$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$a = -1,\ a = 2$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} = 2$$

Раздел школьной математики: алгебра
ЕГЭ: № 13
Раздел высшей математики: теория функций комплексного переменного

а) Решите уравнение $2\cos 2x - 12\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 7 = 0$

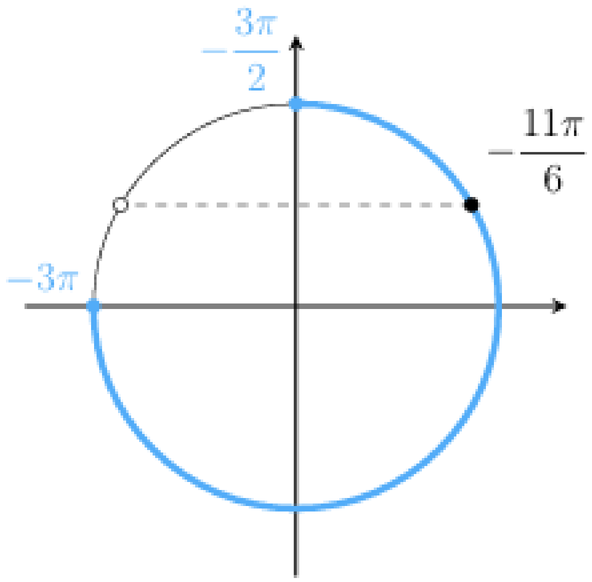
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

$$2(1-2\sin^2 x)+12\sin x-7=0$$

$$4\sin^2 x-12\sin x+5=0$$

$$\sin x=\frac{1}{2},\ \sin x=\frac{20}{8}$$

$$\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z \end{array}\right.$$



$$x=-\frac{11\pi}{6}$$

Найти модуль и аргумент комплексных чисел

1) $z = 3 - 4i$ 2) $z = 4\sqrt{3} + 4i$ 3) $z = -8 + 3i$

Умножить или разделить комплексные числа:

1) $(-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$ 2) $4i(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ 3) $\dfrac{\sqrt{3} + i}{-1 - i\sqrt{3}}$

Возвести в степень

1) $(\sqrt{3} - i)^3$ 2) $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{60}$ 3) $(1 + i)^{2025}$ 4) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{2025}$

Найти все значения

1) $\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}}$ 2) $\sqrt[3]{-8}$ 3) $\sqrt[4]{-1 - i}$ 4) $\sqrt[3]{-1 - i\sqrt{3}}$

Раздел школьной математики: вероятность и статистика
ЕГЭ: № 4-5
Раздел высшей математики: теория вероятностей

Задача.

Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Задача.
Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Теорема Бернулли

Обозначим вероятность наступления некоторого события символом $P_n(m)$, который означает вероятность появления события A ровно m раз при проведении n независимых испытаний. Тогда получим формулу

$$P_n(m)= C_n^m p^m q^{n-m}, \ (m=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Решение.

$n=5$

$p=0,5$ – вероятность рождения девочки.

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 1 \cdot (0,5)^0 \cdot (0,5)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5 \cdot (0,5)^1 \cdot (0,5)^4 = \frac{5}{32}$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10 \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^3 = \frac{10}{32}$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot (0,5)^3 \cdot (0,5)^2 = \frac{10}{32}$$

$$P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$$

Раздел школьной математики: алгебра
ЕГЭ: № 8, 12 (производная), № 11 (графики функций), № 18 (параметр)
Раздел высшей математики: математический анализ, численные методы

Проблема: решить уравнение высшей степени.

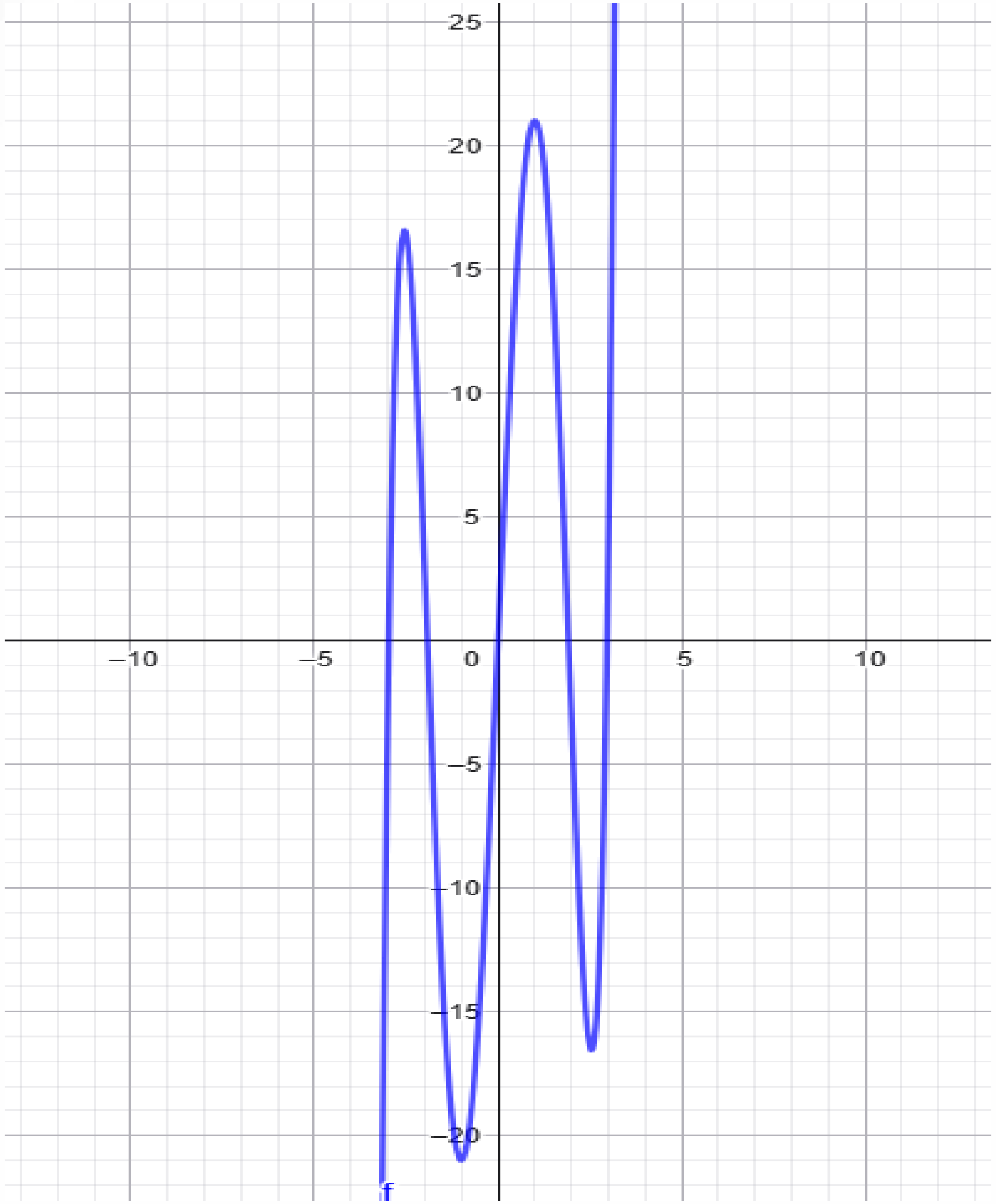
Сколько корней имеет уравнение $x^5-12{,}5x^3+32{,}5x=0$

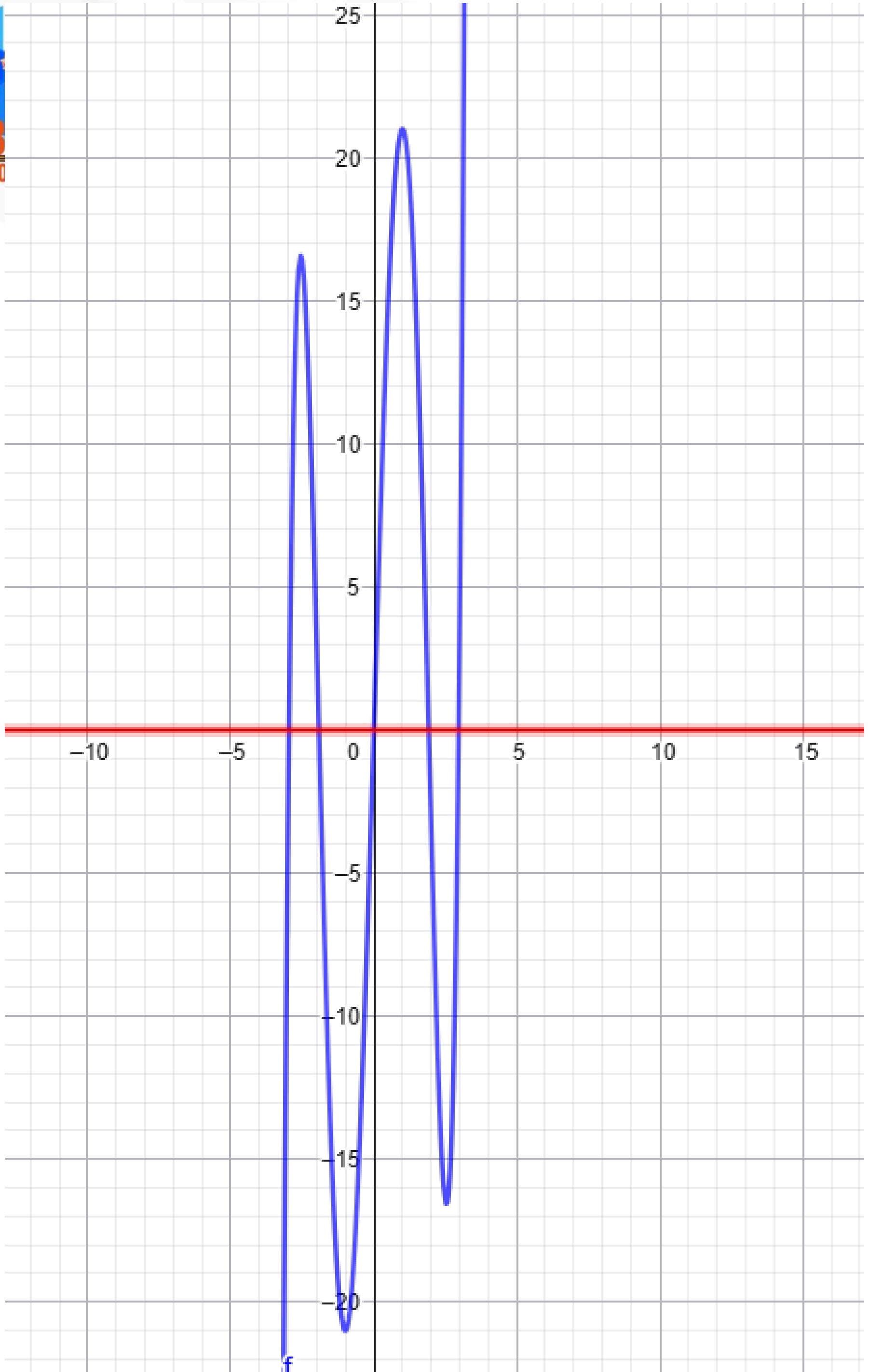
Сколько корней имеет уравнение x^5-12,5x^3+32,5x=0

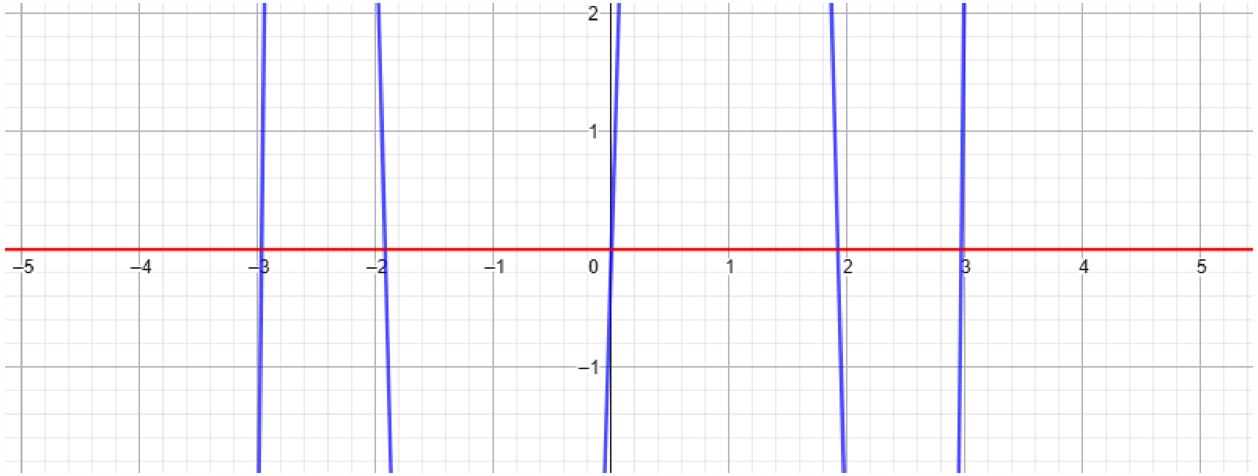
Исследуем функцию$f(x)=x^5$-12,5x^3+32,5x и построим график.

$$f'(x) = 5x^4 - 37{,}5x^2 + 32{,}5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{13}{2}}, x = \pm 1$$


25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−10
−5
5
10
f


25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
5
10
15
f


2
1
−1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

Выясните, сколько корней имеет уравнение x^5-12,5x^3+32,5x=a, в зависимости от параметра a.

$$a \in (-\infty; -21) \cup (21; \infty) \Rightarrow 1$$

$$a = \pm 21 \Rightarrow 2$$

$$a \in (-21; -6{,}5\sqrt{6{,}5}) \cup (6{,}5\sqrt{6{,}5}; 21) \Rightarrow 3$$

$$a = \pm 6{,}5\sqrt{6{,}5} \Rightarrow 4$$

$$a \in (-6{,}5\sqrt{6{,}5}; 6{,}5\sqrt{6{,}5}) \Rightarrow 5$$

Качественная подготовка к ЕГЭ как основа успешного обучения в вузе

Спасибо за внимание!

Задорожная Ольга Владимировна
Доцент кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края