Метод вспомогательной окружности при решении планиметрических задач

Зайцева Анна Валериевна

учитель математики

МБОУ СОШ № 18

МО Туапсинский район

Актуальность метода

Использование связано с характерными признаками фигуры в задаче

Геометрические задачи на доказательство требуют уверенных знаний планиметрии

Метод вспомогательной окружности - мощный инструмент в арсенале геометрических методов решения задач

Особенно эффективен для задач, связанных с окружностями и их свойствами

Позволяет значительно упростить решение сложных планиметрических задач

Использование связано с характерными признаками фигуры в задаче

1

Правильный треугольник

Окружность с центром в вершине или описанная окружность с дугами по 120°

2

Прямоугольный треугольник

Описанная окружность с центром в середине гипотенузы

3

Четырёхугольник

Если сумма противоположных углов равна 180°, то можно описать окружность

4

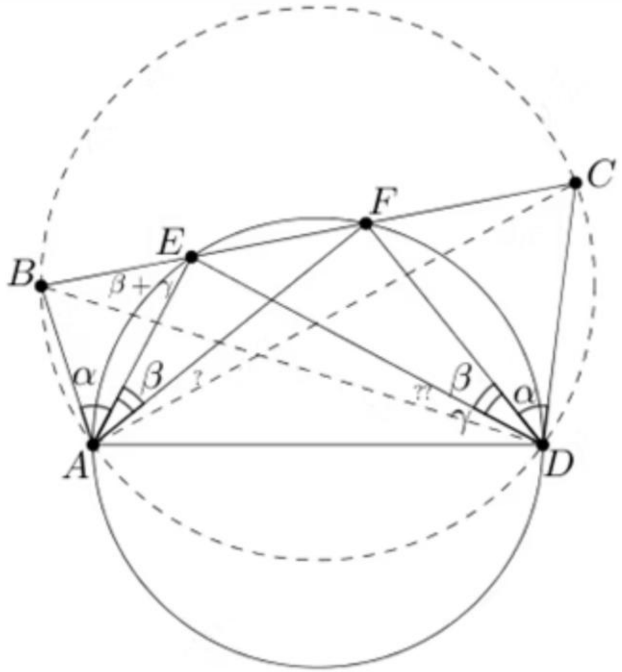
Равные углы

Если отрезок виден под равными углами, точки лежат на одной окружности

№1

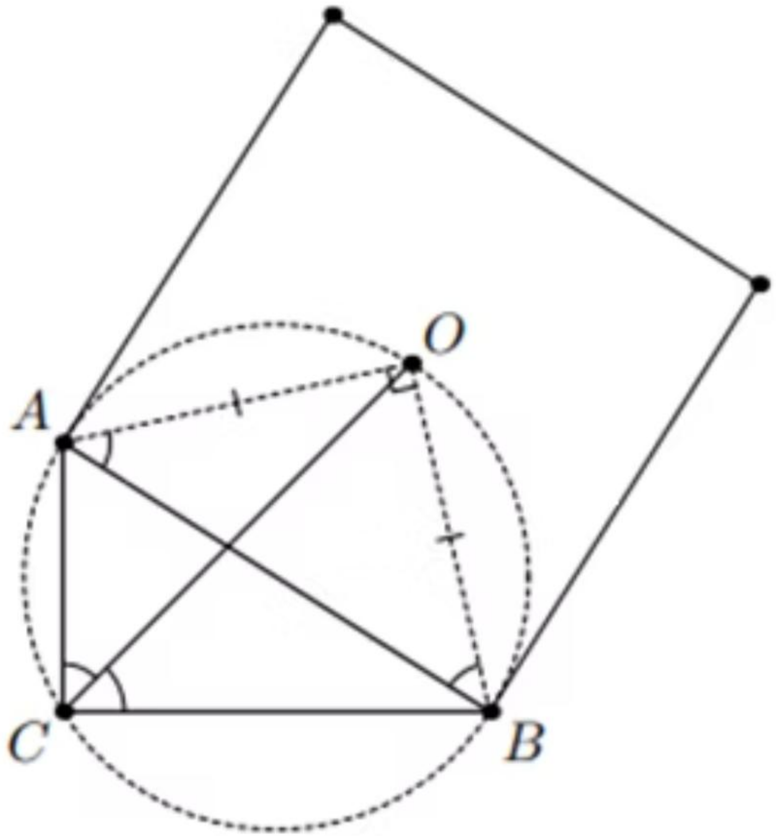
На стороне BC выпуклого четырехугольника ABCD взяты точки E и F (точка E ближе к точке B, чем точка F). Известно, что ∠BAE = ∠CDF и ∠EAF = ∠FDE. Докажите, что ∠FAC = ∠EDB.

Заметим, что если заключение задачи верно, то отрезок BC должен быть виден из точек A и D под одним углом, то есть четырехугольник $ABCD$ должен быть вписанным. (Рис. 1) Докажем, что $ABCD$ действительно вписан (этого, очевидно будет достаточно). Пусть $\angle BAE = \angle CDF = \alpha$, $\angle EAF = \angle FDE = \beta$, а $\angle EDA = \gamma$. Тогда отрезок EF виден из точек A и D под углом β, то есть $AEFD$ — вписанный четырехугольник, а значит, $\angle BEA = \angle ADE = \beta + \gamma$. Получается, что $\angle ABE = 180° - \alpha - \beta - \gamma$, откуда $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, то есть $ABCD$ вписан. Что и требовалось доказать.



№ 2

На стороне BC выпуклого четырехугольника ABCD взяты точки E и F (точка E ближе к точке B, чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$.



1)

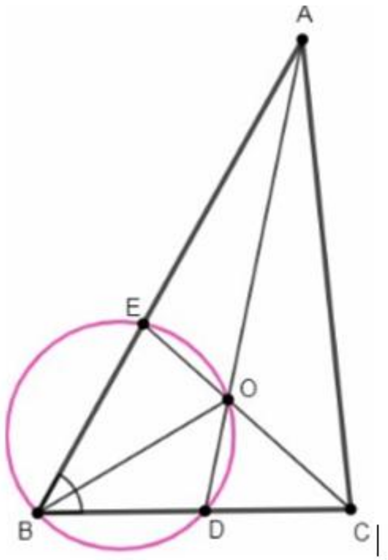
1. $\angle AOB = 90°$, то есть в четырёхугольнике AOBC два противолежащих угла прямые $\Rightarrow$ точки A, O, B и C лежат на одной окружности (рис. 2).

2. Воспользуемся равенством вписанных углов, опирающихся на равные дуги, и тем, что треугольник AOB равнобедренный: $\angle ACO = \angle ABO = \angle BAO = \angle BCO \Rightarrow$ CO — биссектриса угла C. Что и требовалось доказать.

2) AB – диаметр вспомогательной окружности. Любая хорда меньше или равна диаметру. $\Rightarrow CO \leq AB$.

№ 3

В треугольнике ABC ∠B = 60°. Биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что OD = OE.



1. ∠B=60° => ∠A+∠C=120° (сумма углов треугольника 180°)

2. △AOC: $\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle C}{2}$ =60° => ∠AOC=120°

3. ∠DOE=∠AOC=120° (вертикальные)

4. BDOE - вписанный четырехугольник (сумма противоположных углов а 180°)

5. Равные углы опираются на равные дуги=> ∪OD=∪OE

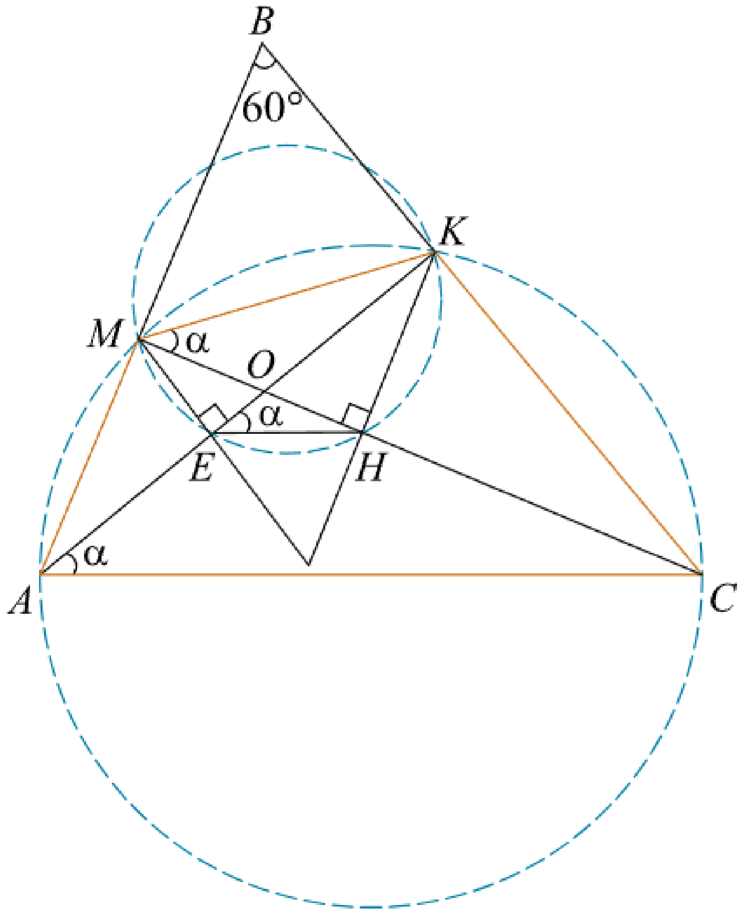
6. Равные дуги стягивают равные хорды=> OD=OE

№ 4

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH и AC, если $\angle ABC = 60^0$.



а)

Поскольку $\angle AMC = \angle AKC = \angle MEK = \angle MHK = 90^0$, около четырёхугольников $AMKC$ и $MEHK$ можно описать окружность с диаметрами AC и MK соответственно (рис. 4)$\Rightarrow \angle KAC = \angle KMC = \angle KMH = \angle KEH$, $\Rightarrow AC \parallel EH$. Что и требовалось доказать.

б)

Пусть O — точка пересечения отрезков AK и CM. Тогда $\angle AOM = 90^0 - \angle MAO = 90^0 - \angle BAK = \angle ABC = 60^0$.

В ΔEOH и ΔAOC $\angle AOC$ общий, а $\angle OEH = \angle OAC \Rightarrow \Delta EOH \sim \Delta AOC$.

Так как $EO = MO \cdot \cos\angle AOM = AO \cdot \cos^2\angle AOM = AO \cdot \cos^2 60^0 = \frac{1}{4}AO$, коэффициент подобия равен $\frac{1}{4}$. Значит, $EH : AC = 1 : 4$.

Сложные планиметрические задачи становятся более доступными для понимания и решения

Использование метода повышает математическую культуру учащихся

Задачи с применением метода регулярно встречаются на экзаменах

Заключение

Метод вспомогательной окружности - это не просто геометрический приём, а мощный инструмент развития математического мышления

Позволяет проводить уроки на более высоком уровне и готовить к сложным задачам ЕГЭ

Формирует у учащихся опыт использования различных подходов к решению задач