Применение координатно-векторного метода при решении стереометрических задач ЕГЭ математика профильного уровня

Учитель математики
МОБУ гимназия № 15
г. Сочи им. Н. Н. Белоусова
Ильина З. Н.

Существует два способа решения задач по стереометрии

Первый — классический — требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает мозги и пространственное воображение.

Другой метод — применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Он очень удобен, особенно когда времени до экзамена мало, а решить задачу хочется.

Рассмотрим задачу ЕГЭ. решим ее двумя способами.

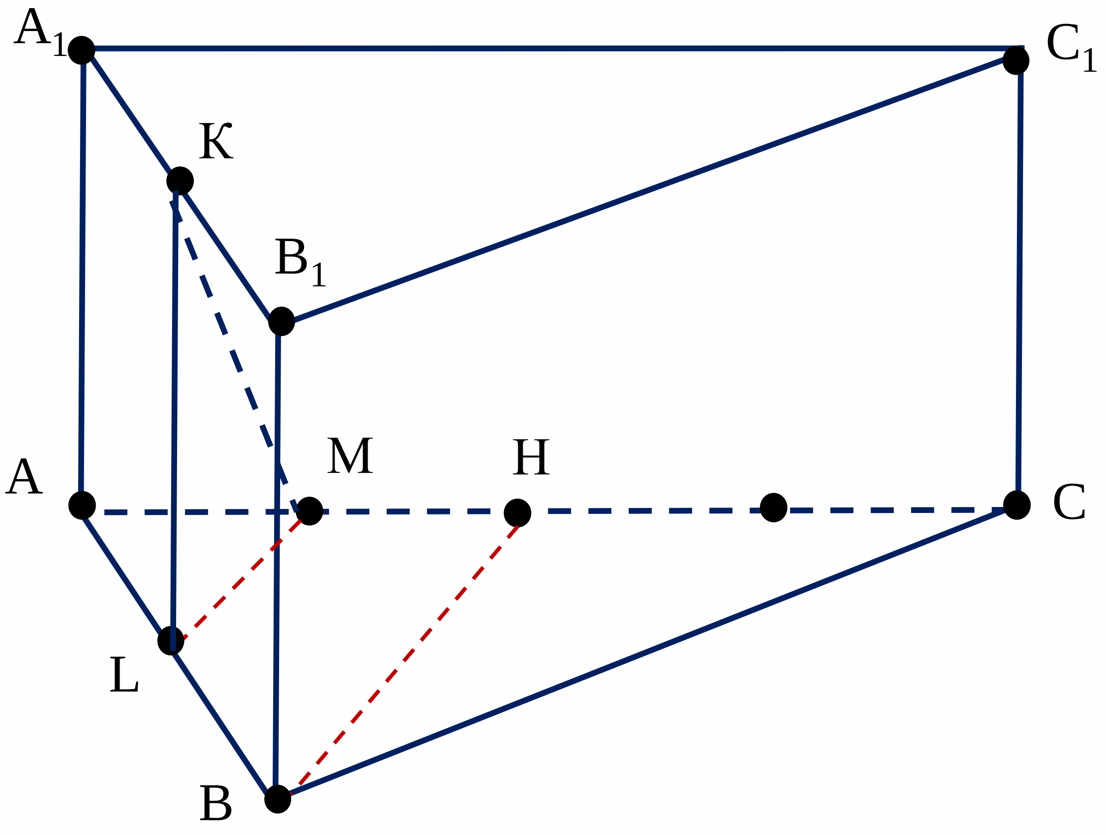
Задача 545. Прототип 15.8 Ответ

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

I СПОСОБ



ДАНО: Прямая треугольная призма ABC$A_1B_1C_1$

AB = BC

К-середина A_1B_1

$A \in AC$

$AM : MC = 1:3$

б) AB=6

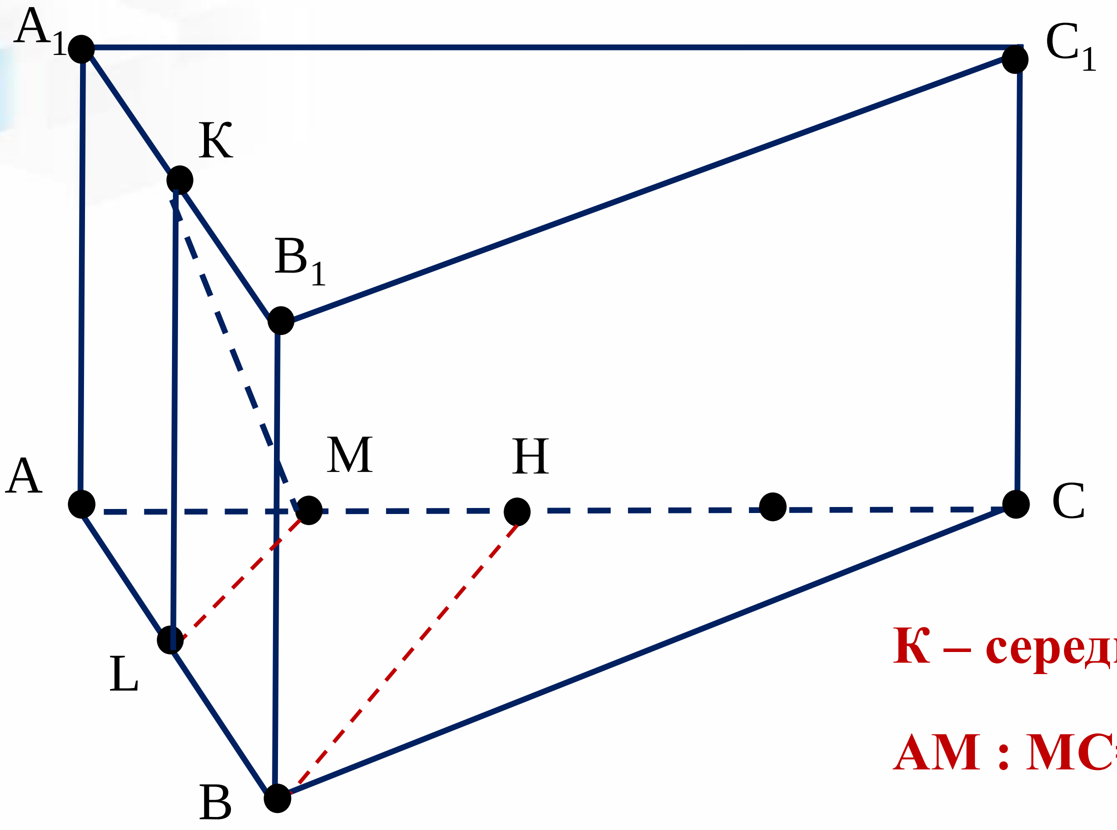
AC=8

AA_1=3

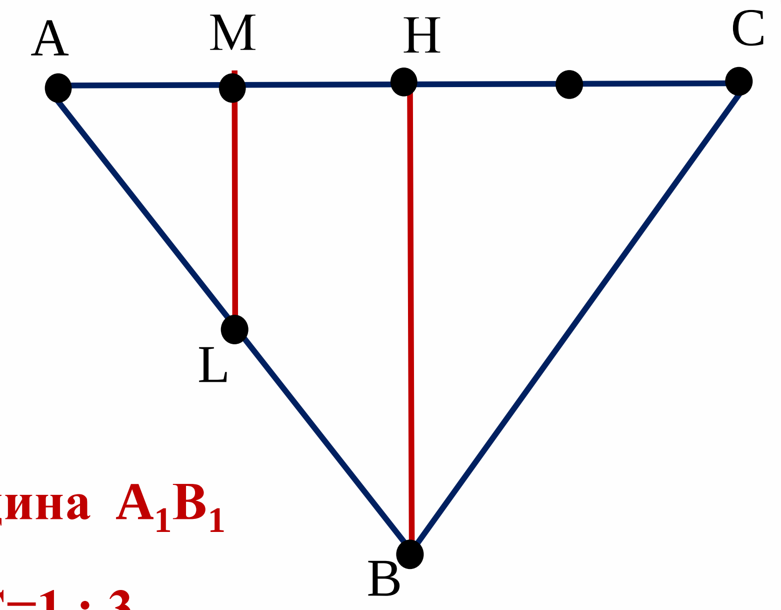
а) **Докажите:** $KM \perp AC$

б) **Найдите:** $\angle(KM,(ABB_1))$

а)



I СПОСОБ



К – середина A_1B_1

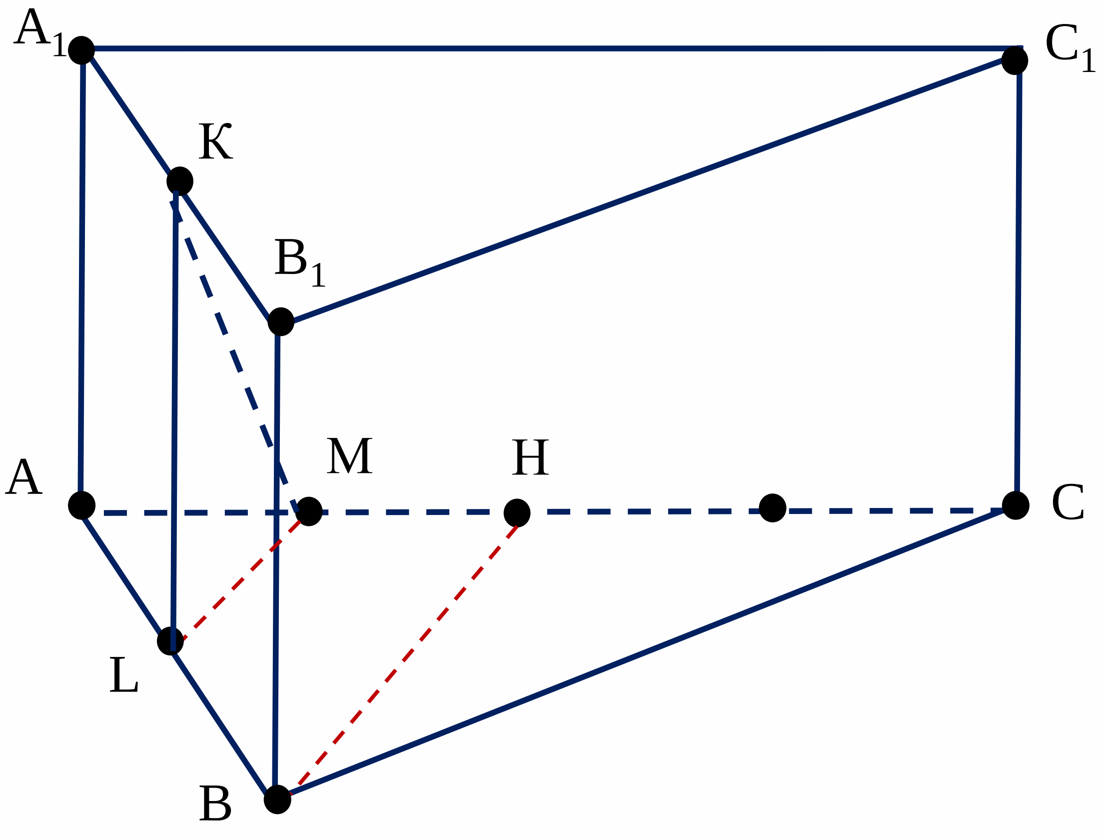
AM : MC=1 : 3

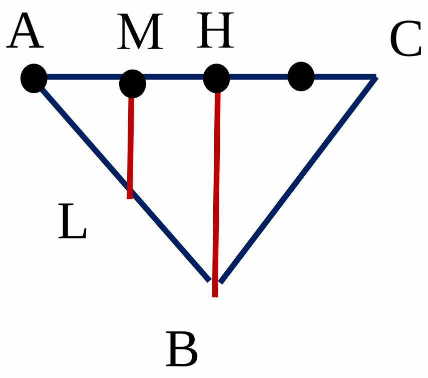
1. По условию AM : MC =1 : 3
BH-высота равнобедренного треугольника ABC.
Значит AH : HC = 1 : 1 =2 : 2
Следовательно AM : MH = 1:1.
То есть точка M середина отрезка AH.
Точка L проекция точки К на прямую AB. AL : LB = 1:1. То есть точка L середина отрезка AB.

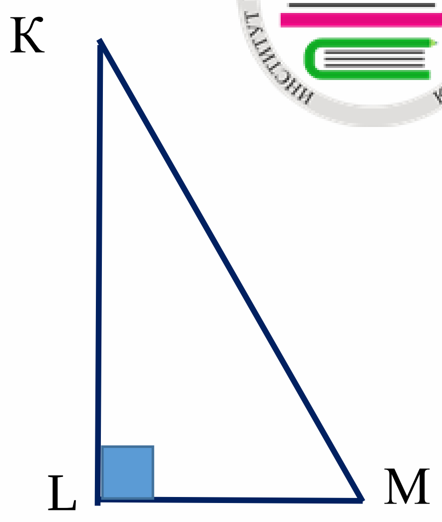
2. Точка L проекция точки К на прямую AB.
AL : LB = 1:1.
Тогда ML средняя линия треугольника ABH и LM|| BH.

Итак $LM \parallel BH, BH \perp AC \Rightarrow LM \perp AC$

I СПОСОБ







КМ – наклонная
KL – перпендикуляр
LM - проекция наклонной КМ

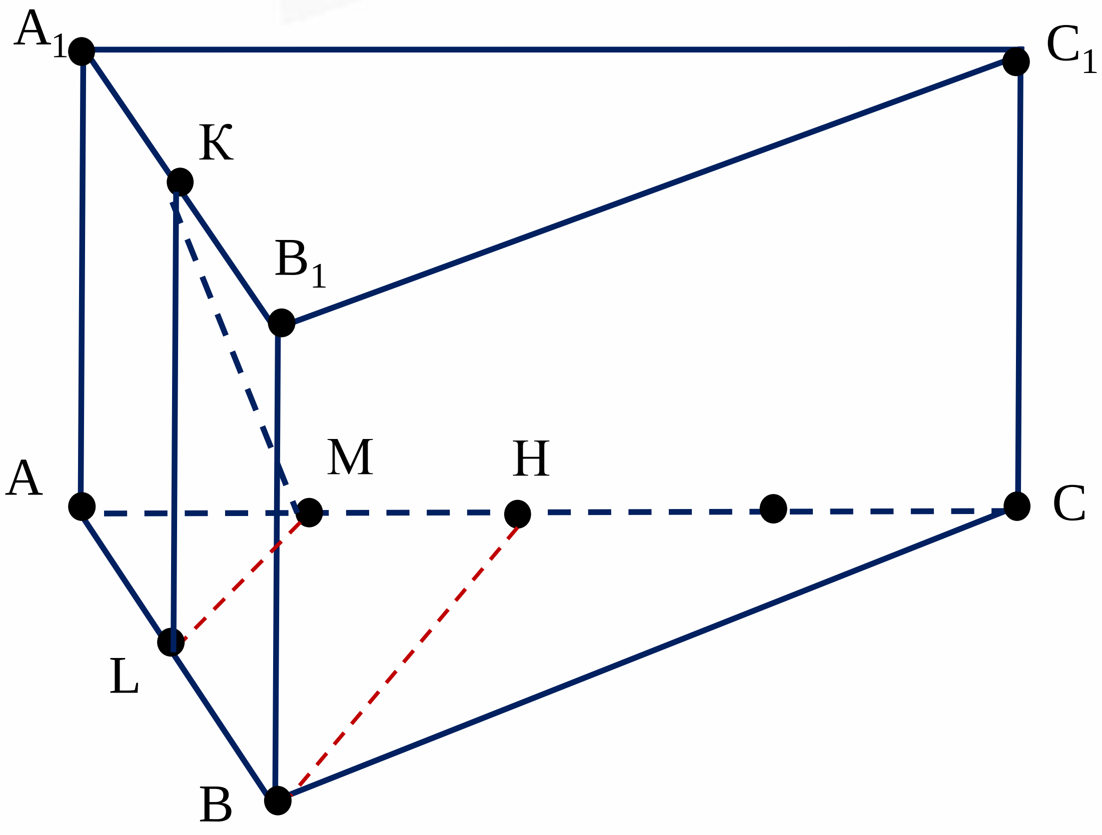
$$LM \perp AC \Rightarrow KM \perp AC$$

(По теореме о трех перпендикулярах)

Итак $LM \parallel BH, BH \perp AC \Rightarrow LM \perp AC$

I СПОСОБ

б)



ДАНО: Прямая треугольная призма ABC$A_1B_1C_1$

AB = BC

К-середина A_1B_1

$A \in AC$

$AM : MC = 1:3$

б) AB=6

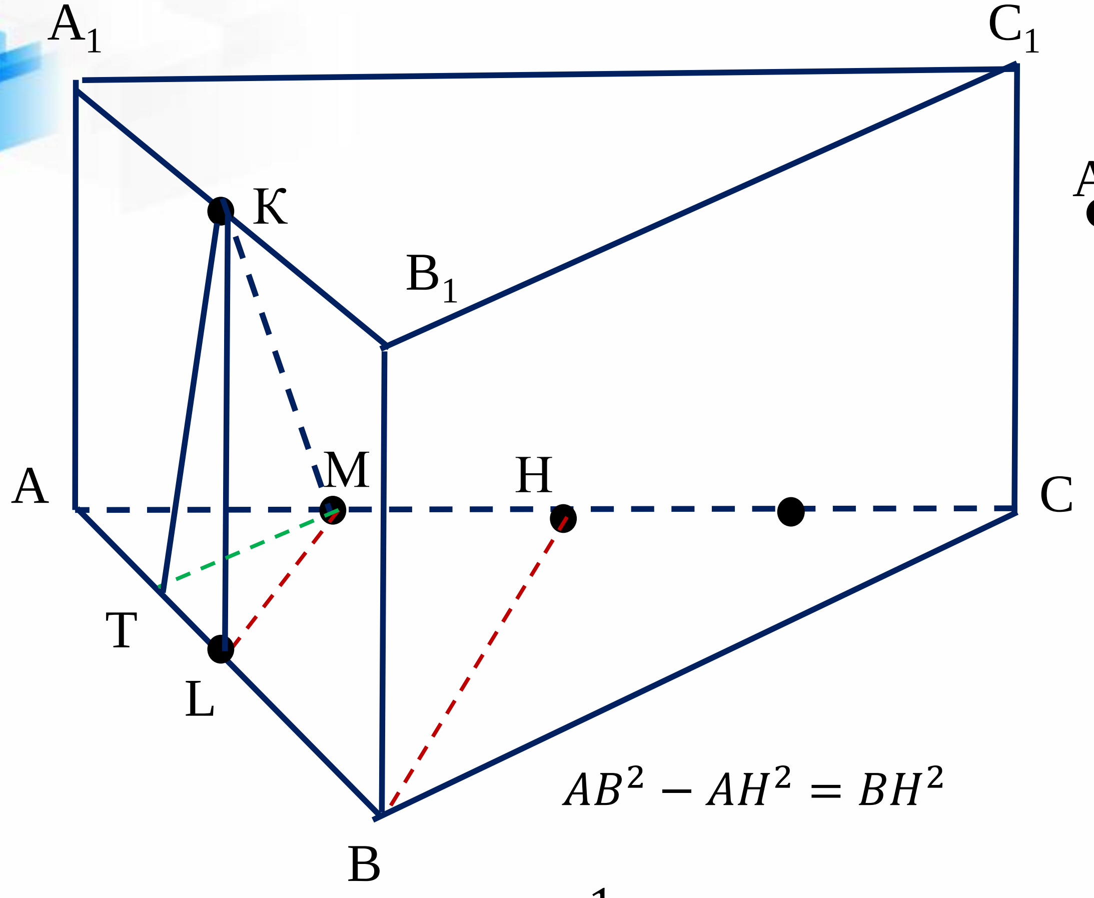
AC=8

AA_1=3

а) **Докажите:** $KM \perp AC$

б) **Найдите:** $\angle(KM, (ABB_1))$

I СПОСОБ



$AB^2 - AH^2 = BH^2$

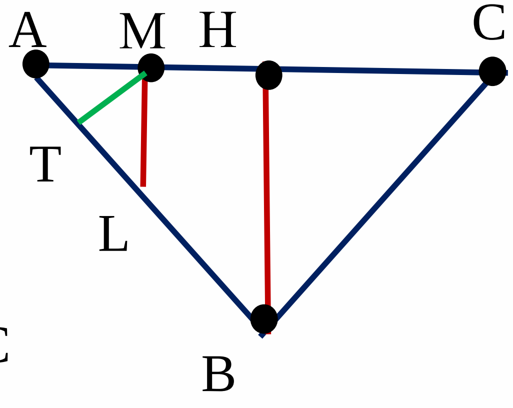


рис. 1

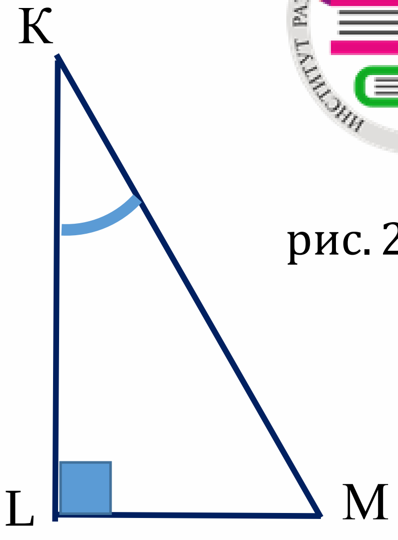


рис. 2

$AB = 6;\ \ AC = 8;\ \ AA_1 = 3$

$LK = AA_1 = 3$

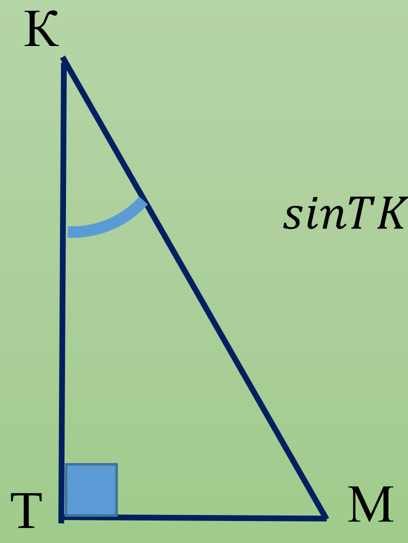
$LM = \frac{1}{2}BH$

$AH = \frac{1}{2}AC$

$BH^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

$BH = \sqrt{20}$

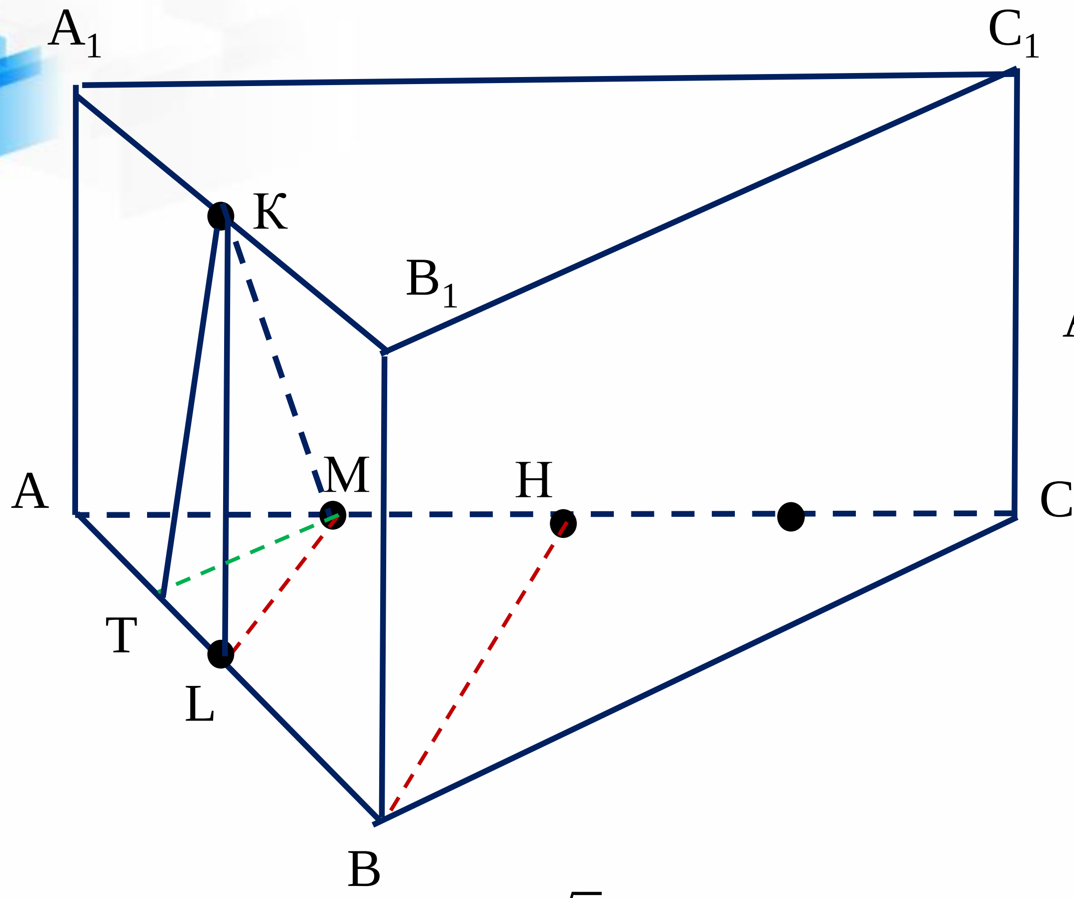
$LM = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{20} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$



$sinTKM = \frac{TM}{TK}$

рис. 3

I СПОСОБ



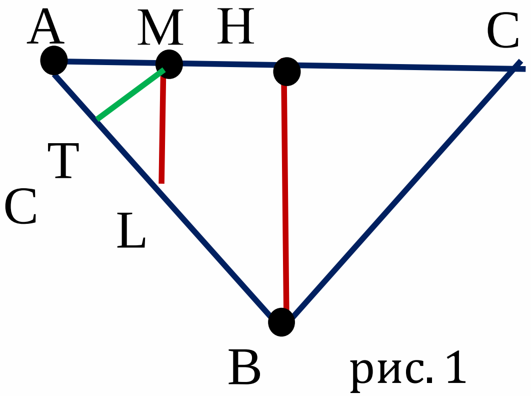


рис. 1

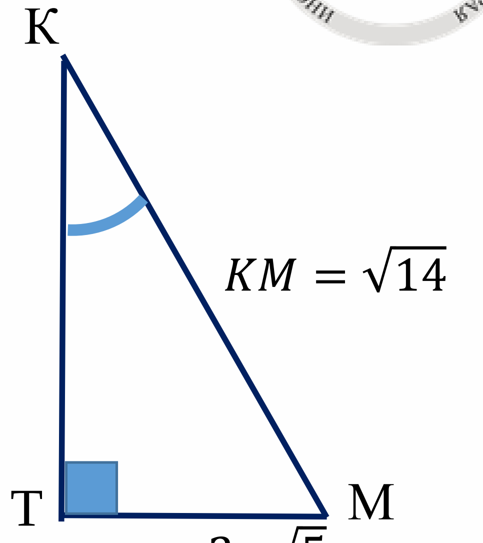


рис. 3

$TM = \dfrac{2 \cdot \sqrt{5}}{3}$

$AB = 6$; $AC = 8$; $AA_1 = 3$

$LK = AA_1 = 3$

$LM = \sqrt{5}$

$TM = \dfrac{AM \cdot ML}{AL}$

$TM = \dfrac{2 \cdot \sqrt{5}}{3}$

$KM^2 = KL^2 + LM^2$

$KM^2 = (\sqrt{5})^2 + 3^2$

$KM^2 = 5 + 9 = 14$

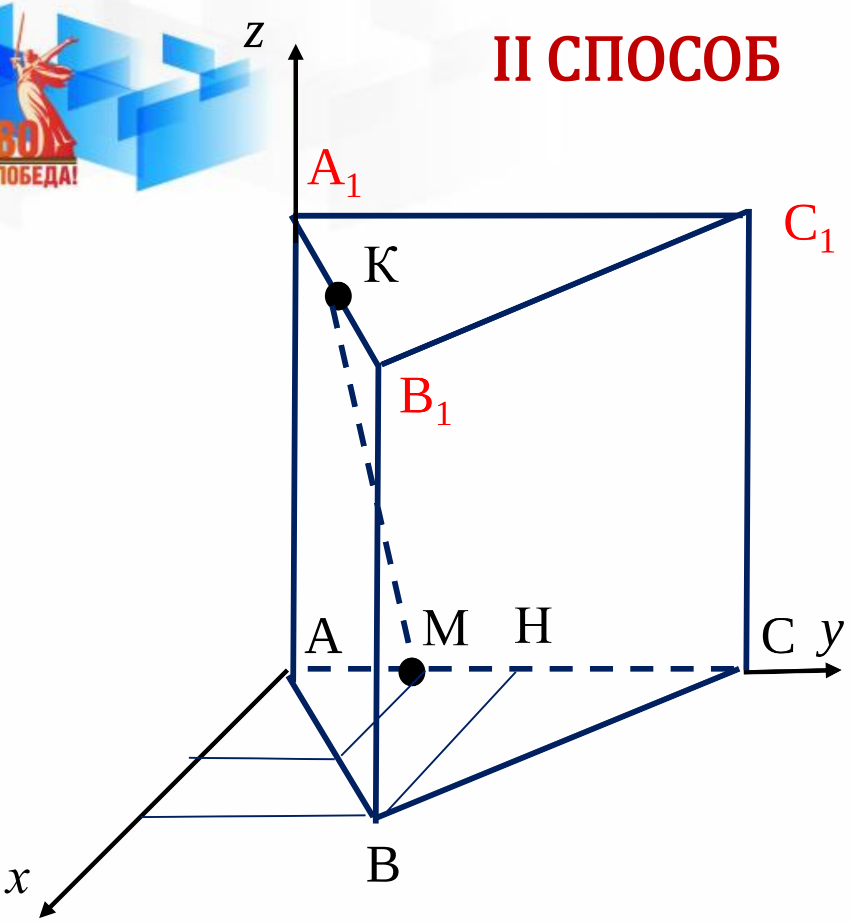
$KM = \sqrt{14}$

$$sinTKM = \frac{TM}{TK} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3} : \sqrt{14} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3\sqrt{14}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{14}}{3 \cdot 14}$$

$$sinTKM = \frac{2 \cdot \sqrt{70}}{3 \cdot 14} = \frac{\sqrt{70}}{3 \cdot 7} = \frac{\sqrt{70}}{21}$$

Ответ: $arcsin \dfrac{\sqrt{70}}{21}$

II СПОСОБ



ДАНО: Прямая треугольная призма ABC$A_1B_1C_1$

AB = BC

К-середина A_1B_1

$A \in AC$

$AM:MC = 1:3$

б) AB=6

AC=8

AA_1=3

а) **Докажите:** $KM \perp AC$

б) **Найдите:** $\angle(KM, (ABB_1))$

II МЕТОД

МЕТОД КООРДИНАТ

Нахождение координат вектора

Если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

ПРИМЕР

$A(1; 2; 3)$

$B(3; 3; 2)$

$$\overrightarrow{AB}\ \{3 - 1; 3 - 2; 2 - 3\}$$

$$\overrightarrow{AB}\ \{2;\ 1; -1\}$$

Нахождение длины вектора.

Если $\vec{a}\{x; y; z\}$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ПРИМЕР

Если $\vec{a}\{1; 2; 3\}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

Нахождение длины отрезка.

Длина отрезка-это длина вектора.

1. **Выписать координаты концов отрезка. Например точек M и N.**
2. **Найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$.**
3. **Найти длину вектора $\overrightarrow{MN}$.**

Скалярное произведение векторов в координатах.

Если $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$,

то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

ПРИМЕР

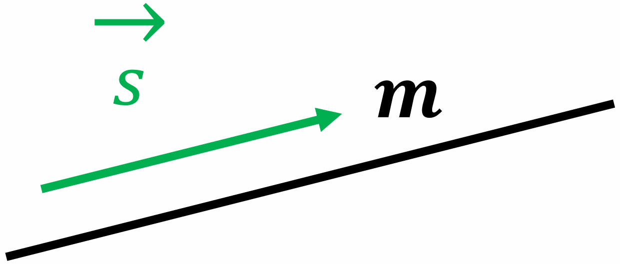
$\vec{a}\ \{1; 2; 3\}$

$\vec{b}\ \{2; 1; 4\}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 16$

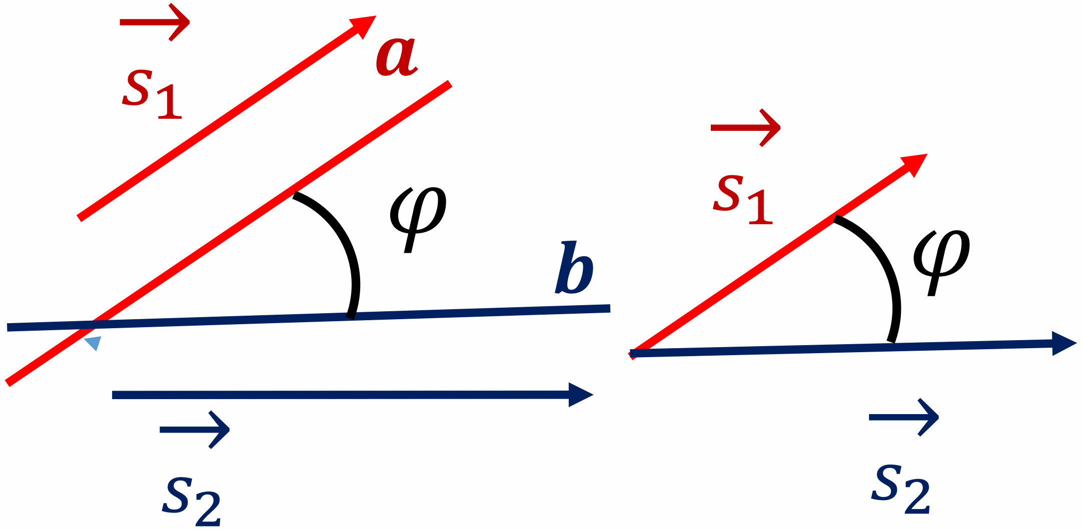
Угол между прямыми

Вектор называют направляющим вектором прямой, если он находится на прямой или параллелен этой прямой.



Чтобы определить косинус угла между прямыми, надо определить косинус угла между направляющими векторами этих прямых, то есть найти векторы, параллельные прямым, и определить косинус угла между векторами.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{|\vec{s_1}| \cdot |\vec{s_2}|}$$

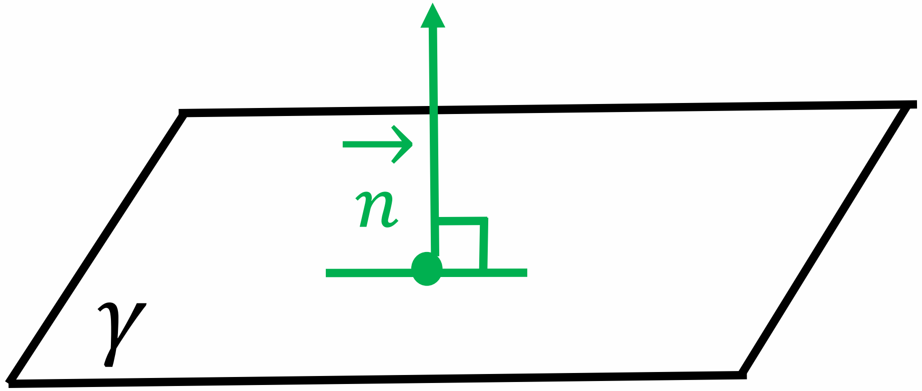


$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

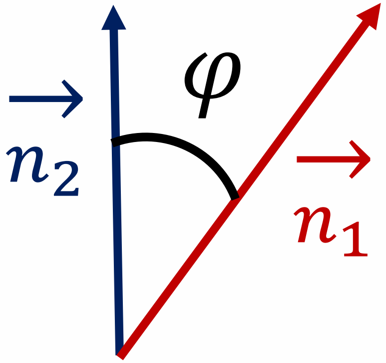
$$\cos(\widehat{a, b}) = |\cos\varphi|$$

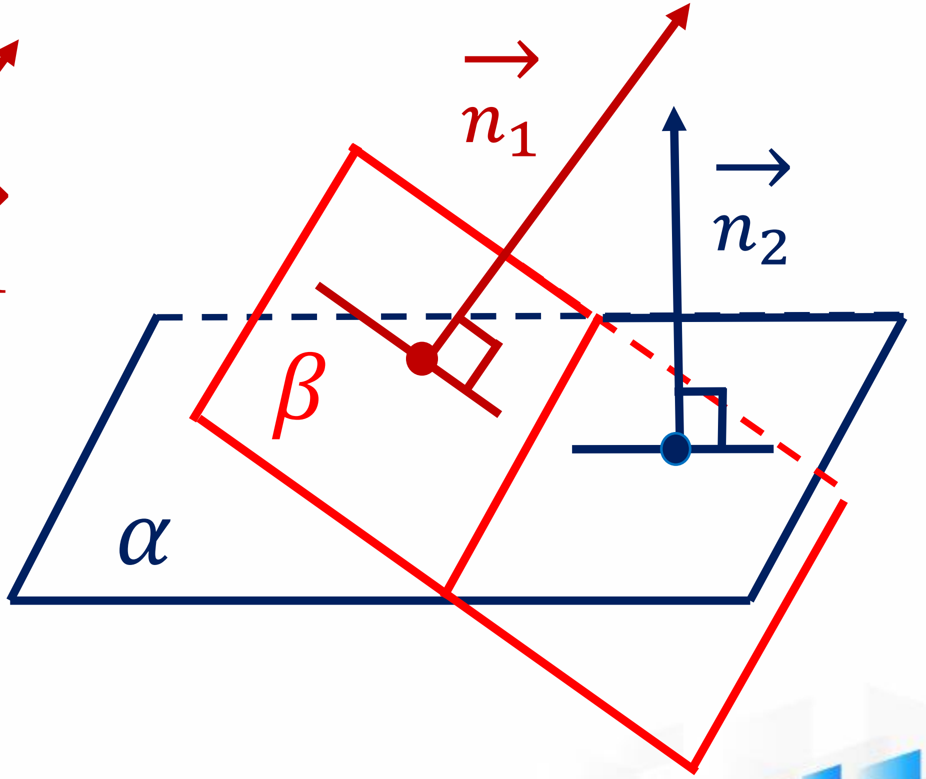
Угол между плоскостями

Нормальный вектор плоскости — это любой ненулевой вектор, лежащий на прямой, перпендикулярной к данной плоскости.



$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|}$$

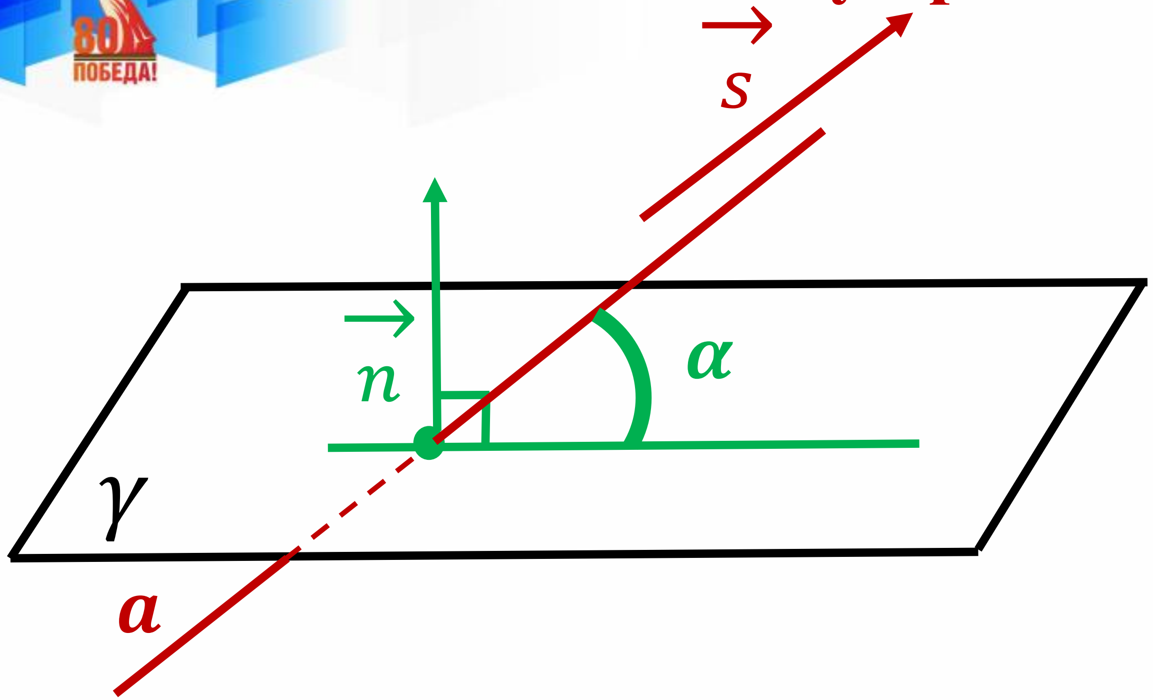


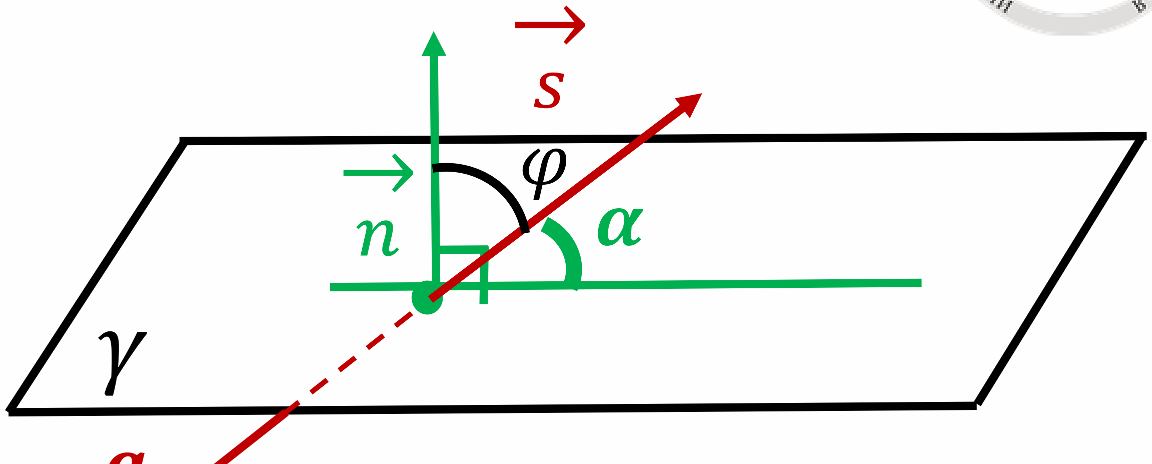


$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

$$\cos(\widehat{\alpha,\beta}) = |\cos\varphi|$$

Угол между прямой и плоскостью





$$\sin\alpha = \cos\varphi$$

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \varphi)$$

$$\sin\alpha = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}$$

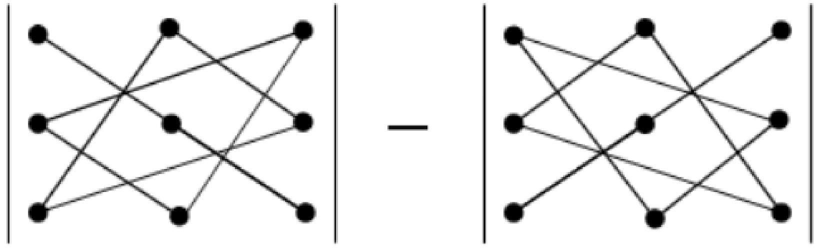
Вычисление определителя третьего порядка.

Правило треугольника

Определитель матрицы третьего порядка можно вычислить, используя правило треугольника или правило Саррюса. Названо по имени французского математика Пьера Фредерика Саррюса.

Схематически это правило можно изобразить следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} + a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32} - \\ -a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}.$$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Уравнение плоскости проходящей через 3 точки.

$\alpha: Ax + By + Cz = 0$

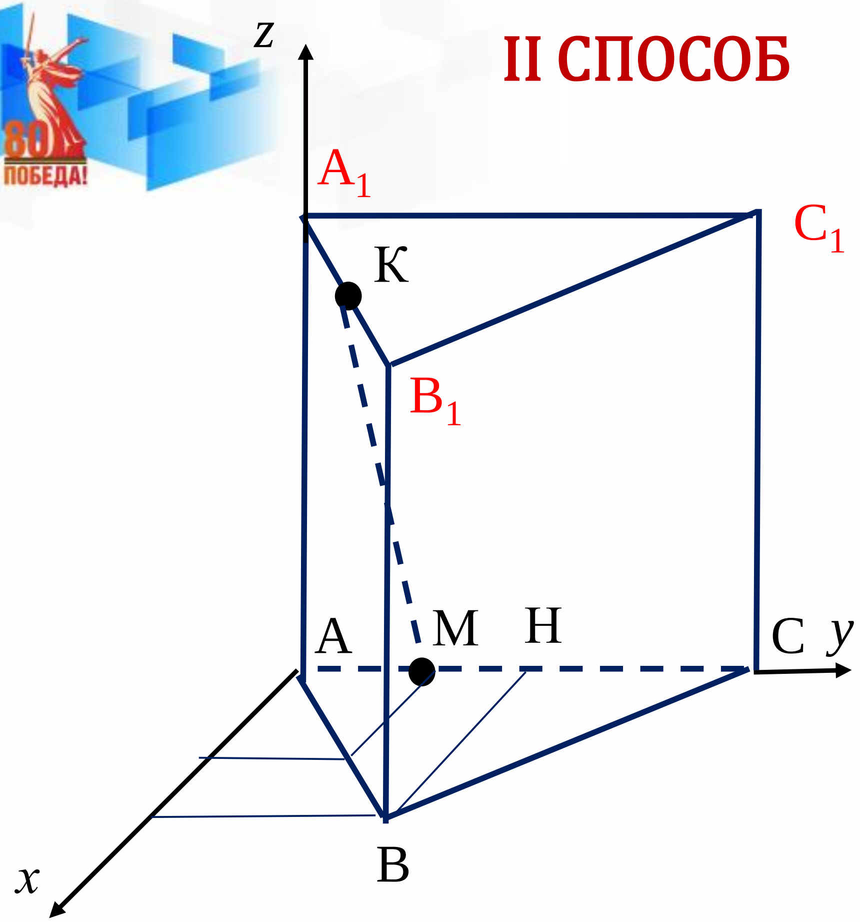
$\vec{n}\{A; B; C\}$

$M_1(x_1; y_1; z_1)$,
$M_2(x_2; y_2; z_2)$,
$M_3(x_3; y_3; z_3)$,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - x_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

II СПОСОБ



ДАНО: Прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$

AB = BC

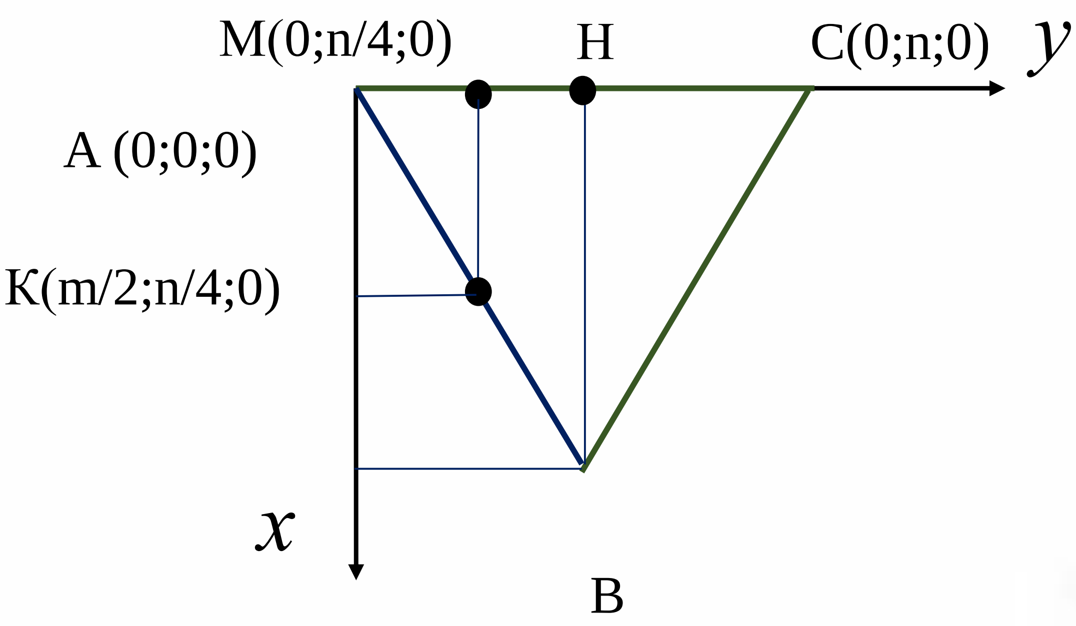
К-середина A_1B_1

$A \in AC$

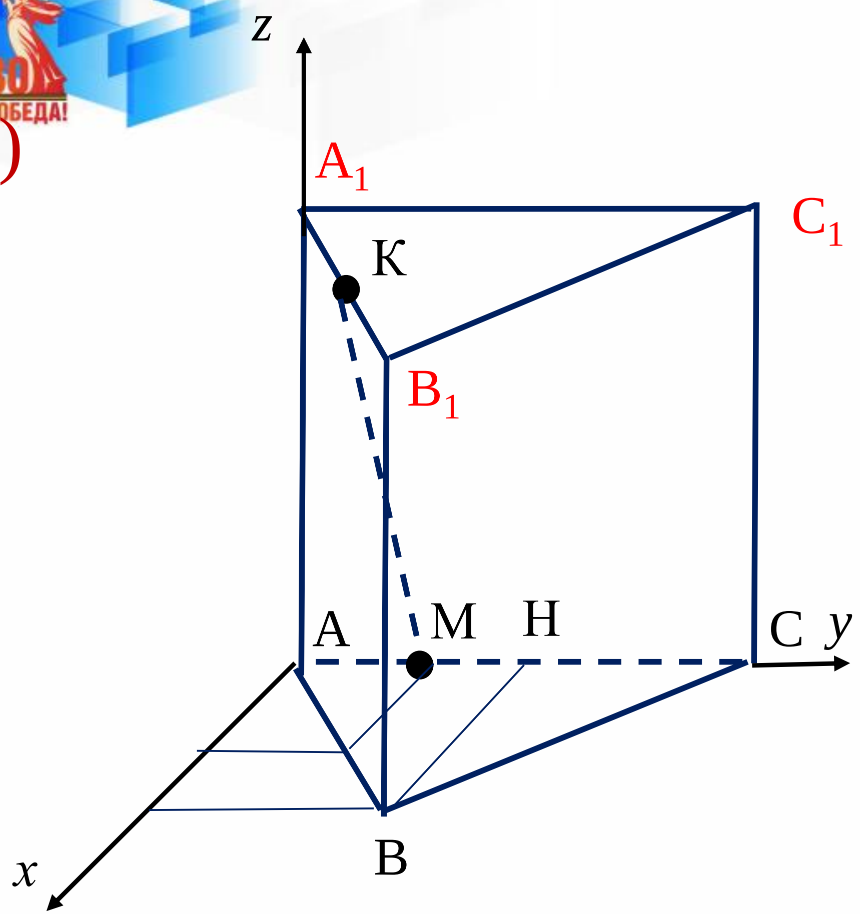
$AM : MC = 1:3$

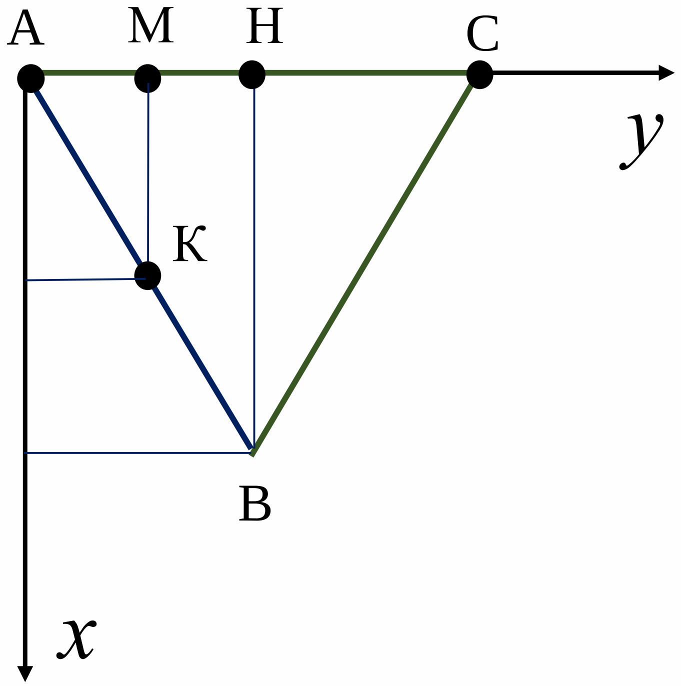
а) **Докажите:** $KM \perp AC$

РЕШЕНИЕ:



а)





II СПОСОБ

C(0;n;0)

A (0;0;0)

К$\left(\frac{m}{2};\frac{n}{4};k\right)$

M$\left(0;\frac{n}{4};0\right)$

$\vec{AC}\{0;n;0\}$

$\vec{KM}\left\{-\frac{m}{2};0;-k\right\}$

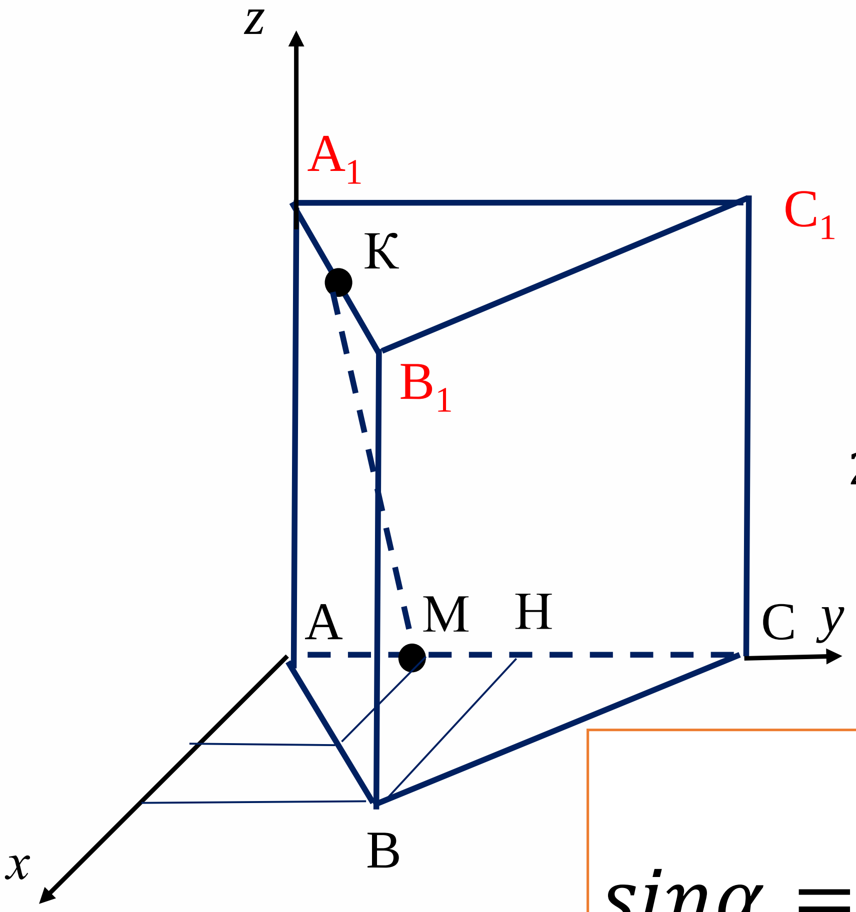
$$\vec{AC}\cdot\vec{KM}=0\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)+n\cdot 0+0\cdot(-k)=0\Rightarrow\angle\left(\vec{AC},\vec{KM}\right)=90^\circ\quad\Rightarrow\vec{AC}\perp\vec{KM}$$

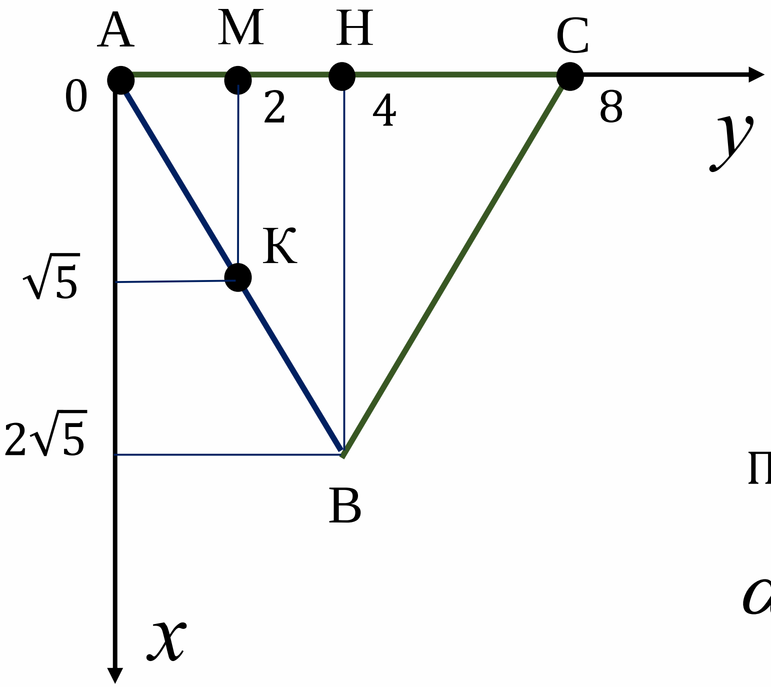
$AB = 6;\ AC = 8;\ AA_1 = 3$

б) **Найдите:** $\angle(KM,(ABB_1))$

б)

II СПОСОБ





$K(\sqrt{5};\ 2;0)$

$M(0;\ 2;3)$

$\overrightarrow{KM}\{-\sqrt{5};0;0\}$

$A(0;\ 0;0)$

$B(2\sqrt{5};\ 4;0)$

$B_1(2\sqrt{5};\ 4;3)$

Пусть α – искомый угол.

$$\alpha = \angle(KM,(BB_1A_1))$$

$$\varphi = \angle(\vec{n},\vec{s})$$

$$sin\alpha = |cos\varphi| = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}$$

Напишем уравнение плоскости проходящей через три точки.

II СПОСОБ

$A(0;\ 0;0)$ $B(2\sqrt{5};\ 4;0)$ $B_1(2\sqrt{5};\ 4;3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_{B_1}-x_A & y_{B_1}-y_A & z_{B_1}-z_A \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2\sqrt{5}-0 & 4-0 & 0-0 \\ 2\sqrt{5}-0 & 4-0 & 3-0 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2\sqrt{5} & 4 & 0 \\ 2\sqrt{5} & 4 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$x\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}-y\cdot\begin{vmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 2\sqrt{5} & 5 \end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix} 2\sqrt{5} & 4 \\ 2\sqrt{5} & 4 \end{vmatrix}=\ 12x-6\sqrt{5}y+0\cdot z=0$$

(ABC): $12x-6\sqrt{5}y+0\cdot z=0$

$\vec{n}\{12;-6\sqrt{5};0\}$

α: $Ax+By+Cz=0$

$\vec{n}\{A;B;C\}$

Найдем угол между прямой и плоскостью.

II СПОСОБ

$$\sin\alpha = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}$$

(ABC): $12x - 6\sqrt{5}y + 0\cdot z = 0$

$\vec{n}\{12; -6\sqrt{5}; 0\}$

$\vec{s} = \vec{KM}\{-\sqrt{5}; 0; 3\}$

$$\sin\alpha = \frac{|12\cdot(-\sqrt{5}) + (-6\sqrt{5})\cdot 0 + 0\cdot 0|}{\sqrt{12^2 + (-6\sqrt{5})^2 + 0^2}\cdot\sqrt{(-\sqrt{5}) + 0^2 + 3^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{|-12\cdot\sqrt{5} + 0 + 0|}{\sqrt{324}\cdot\sqrt{14}} = \frac{12\cdot\sqrt{5}}{18\cdot\sqrt{14}} = \frac{2\cdot\sqrt{5\cdot 14}}{3\cdot 14} = \frac{\sqrt{70}}{3\cdot 7} = \frac{\sqrt{70}}{21}$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{70}}{21}$

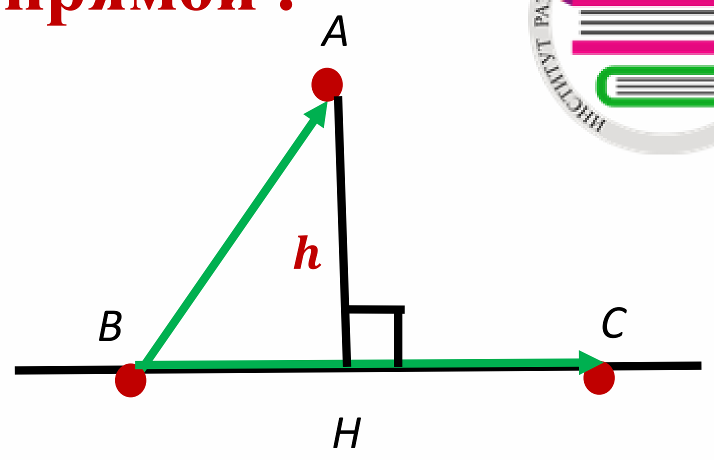
Подготовительные задачи

Задачи , которые надо уметь решать, чтобы выполнить стереометрическую задачу из второй части ЕГЭ профиль.

ЗАДАЧА 1	Нахождение расстояния от точки до точки .
ЗАДАЧА 2	Нахождение расстояния от точки до прямой .
ЗАДАЧА 3	Нахождение расстояния от точки до плоскости .
ЗАДАЧА 4	Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.
ЗАДАЧА 5	Нахождение угла между скрещивающимися прямыми .
ЗАДАЧА 6	Нахождение угла между плоскостями.
ЗАДАЧА 7	Нахождение угла между прямой и плоскостью.

Все эти задачи , можно решить как через теоремы стереометрии, также методом координат. И бывает такое, что методом координат решить проще.

Нахождение расстояния от точки до прямой .



1. Выписать координаты точек A , B и C.

2. Найти координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

3. Найти $\cos\alpha$, где $\alpha = \angle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$

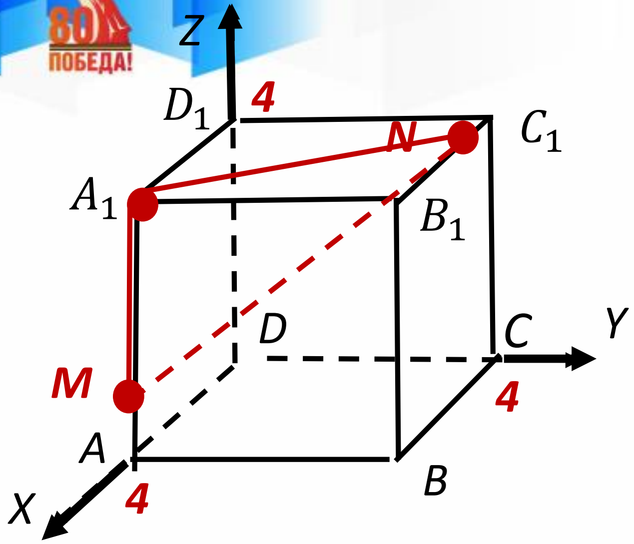
$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

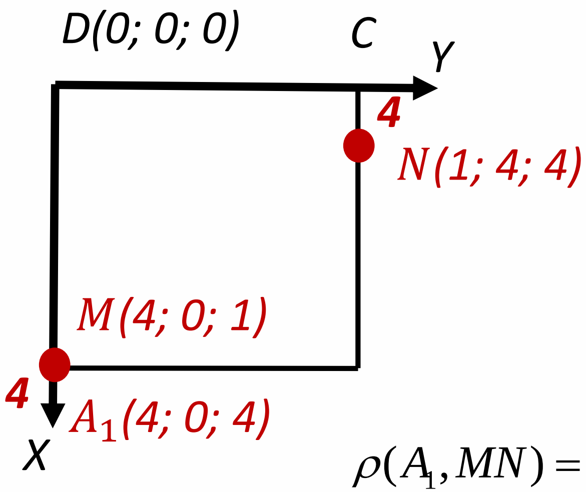
$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

5. Найти высоту AH треугольника ABH .

$$\left|\overrightarrow{AH}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \sin\alpha = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

Нахождение расстояния от точки A_1 до прямой MN.





Дано:

Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

$AB=BC=\ldots=A_1D_1=4$

$M \in AA_1$, $AM:MA_1=1:3$

$N \in AA_1$, $C_1N:NB_1=1:3$

Найти:

Расстояние точки A_1 до прямой MN

Решение:

$A_1(4; 0; 4)$

$M(4; 0; 1)$

$N(1; 4; 4)$

$\overrightarrow{MA_1}\ \{4-4; 0-0; 4-1\}$

$\overrightarrow{MA_1}\ \{0; 0; 3\}$

$|\overrightarrow{MA_1}| = \sqrt{0^2+0^2+3^2} = 3$

$\overrightarrow{MN}\{1-4; 4-0; 4-1\}$

$\overrightarrow{MN}\{-3; 4; 3\}$

$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(-3)^2+4^2+3^2} = \sqrt{34}$

$$\rho(A_1, MN) = \left|\overrightarrow{MA_1}\right| \cdot \sin\angle A_1MN$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{MN}}{\left|\overrightarrow{MA_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MN}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{0\cdot(-3)+0\cdot 4+3\cdot 3}{3\cdot\sqrt{34}}$$

$$\cos\alpha = \frac{9}{3\cdot\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\rho(A_1, MN) = 3\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}}$$

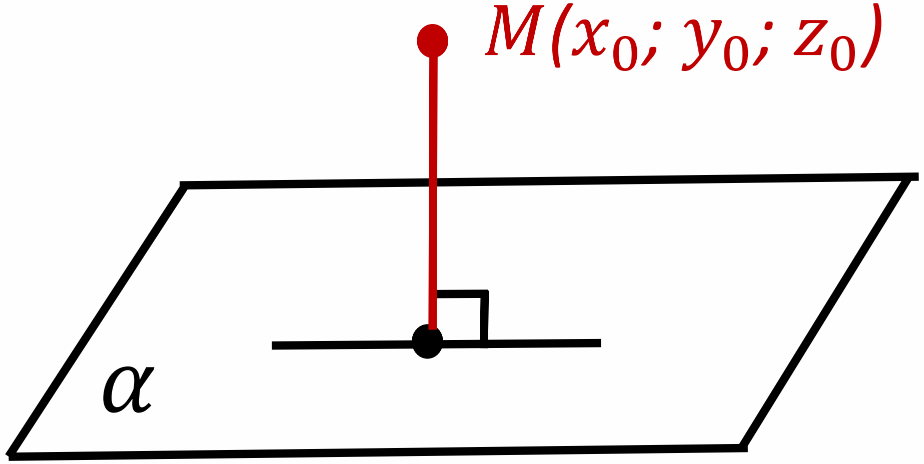
Расстояние от точки до плоскости.

Для нахождения расстояния от точки до плоскости необходимо знать:

1. Координаты точки $M(x_0; y_0; z_0)$

2. Уравнение плоскости

α: $Ax + By + Cz + D = 0$



И тогда

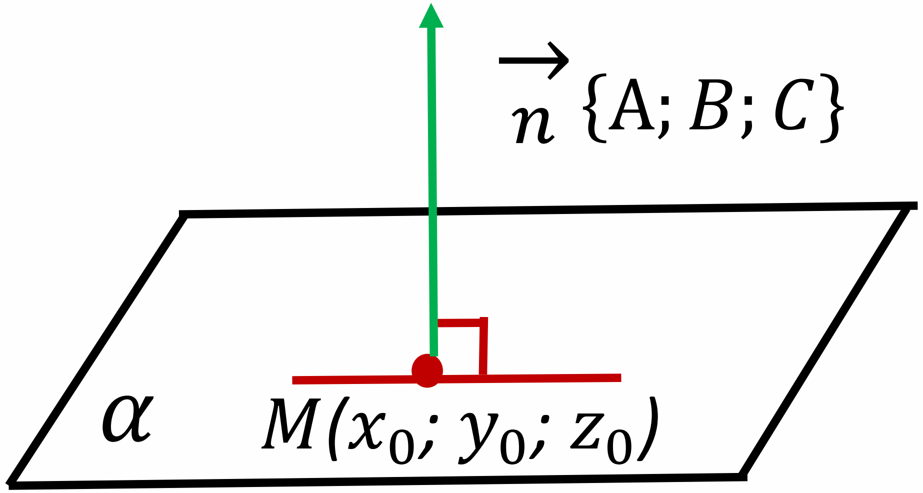
Искомое расстояние $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{M}, \alpha) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Уравнение плоскости

Уравнение плоскости , проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$

перпендикулярно заданному вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$

$$\alpha:\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



$M(1; 2; 3)$

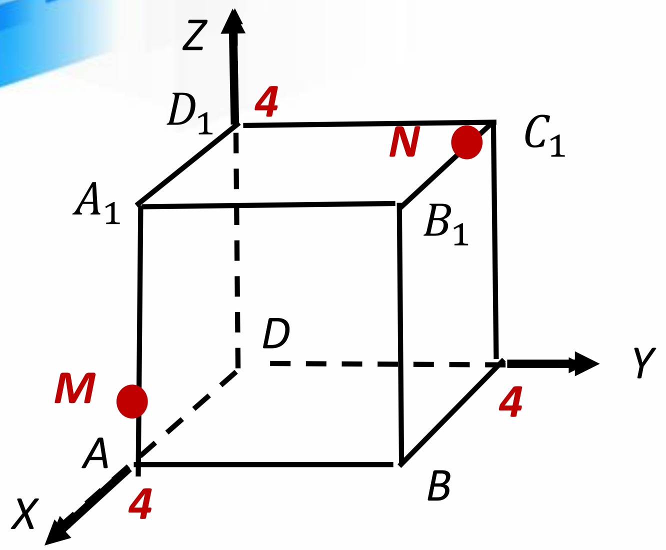
$\vec{n}\{2; 3; 5\}$

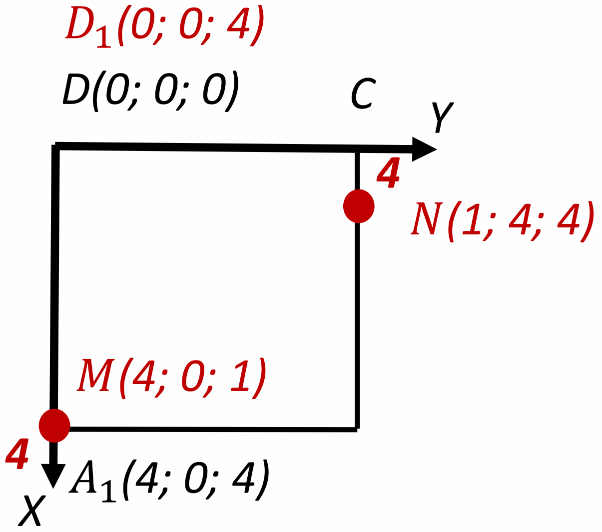
$$\alpha: 2(x - 1) + 3(y - 2) + 5(z - 3) = 0$$

$$\alpha: 2x + 3y + 5z - 2 - 6 - 15 = 0$$

$$\alpha: 2x + 3y + 5z - 23 = 0$$

Уравнение плоскости через три точки.





$M(x_1; y_1; z_1)$, $N(x_2; y_2; z_2)$, $D_1(x_3; y_3; z_3)$,

$M(4; 0; 1)$, $N(1; 4; 4)$, $D_1(0; 0; 4)$,

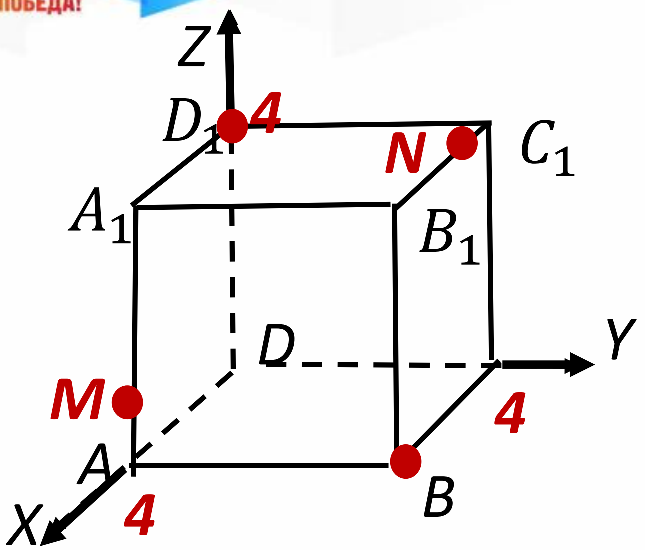
$$\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-1 \\ 1-4 & 4-0 & 4-1 \\ 0-4 & 0-0 & 4-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-1 \\ -3 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

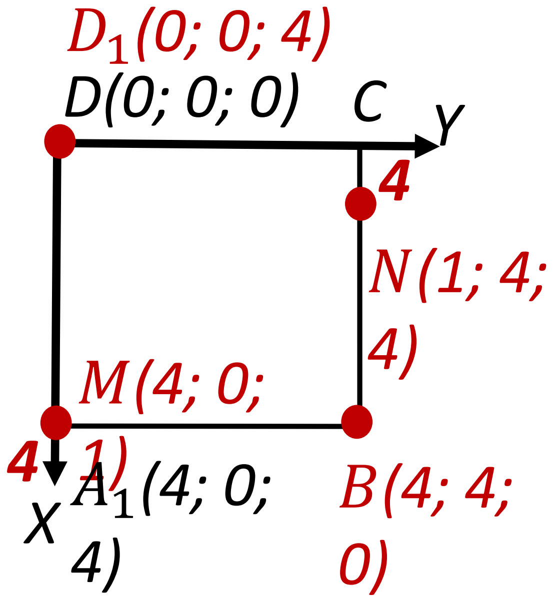
$$(x-4) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (y-0) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + (z-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-4) \cdot 12 - y \cdot 3 + (z-1) \cdot 16 = 0 \qquad 12x - 48 - 3y + 16z - 16 = 0$$

(MND_1): $12x - 3y + 16z - 64 = 0$

Нахождение расстояния от точки до плоскости.





$M(x_1; y_1; z_1)$, $N(x_2; y_2; z_2)$, $D_1(x_3; y_3; z_3)$,

$M(4; 0; 1)$, $N(1; 4; 4)$, $D_1(0; 0; 4)$,

Найти:
расстояние от точки B до плоскости (MND_1)

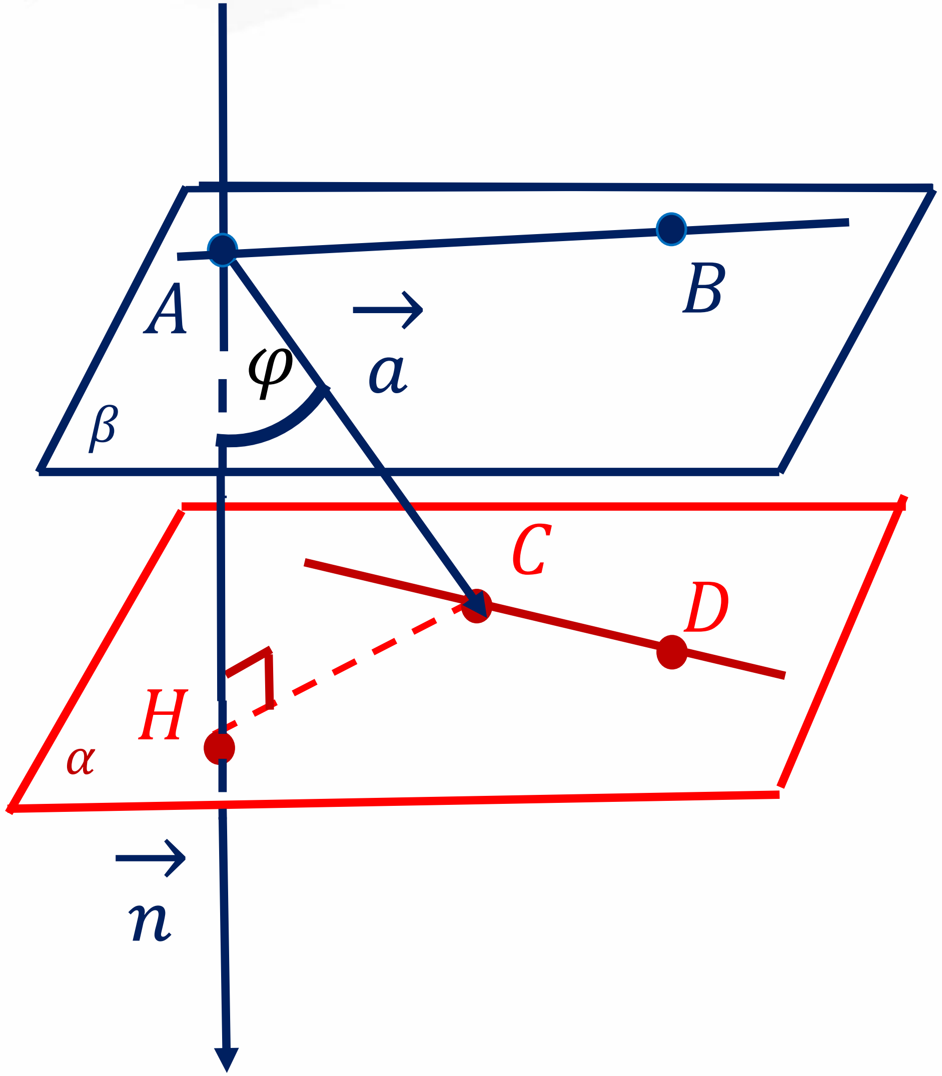
1. Координаты точки $B(4; 4; 0)$

2. Уравнение плоскости (MND_1): $12x - 3y + 16z - 64 = 0$

Искомое расстояние $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{B}, (MND_1)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{B}, (MND_1)) = \frac{|12\cdot4 - 3\cdot4 + 16\cdot0 - 64|}{\sqrt{12^2 + (-3)^2 + 16^2}} = \frac{|48 - 12 + 0 - 64|}{\sqrt{144 + 9 + 256}} = \frac{|48 - 12 + 0 - 64|}{\sqrt{144 + 9 + 256}} = \frac{|-28|}{\sqrt{409}} = \frac{28}{\sqrt{409}}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми



$\vec{n}\ \{x; y; z\}$

$\vec{n} \perp \vec{AB}$

$\vec{n} \perp \vec{CD}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CD} = 0 \end{cases}$$

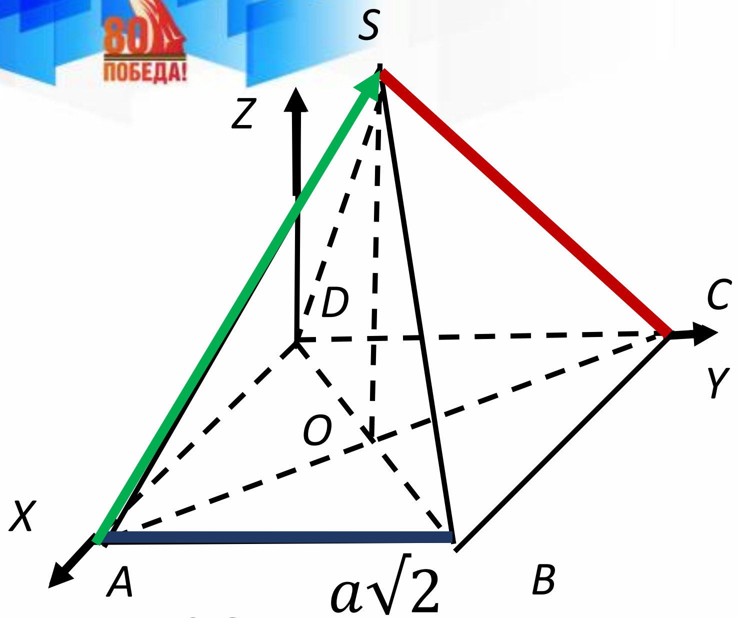
Решим систему, найдем координаты вектора $\vec{n}$

Пусть $\vec{a} = \vec{AC}$

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi = \left|\vec{n}\right| \cdot Пр_{\vec{n}}\, \vec{a}$$

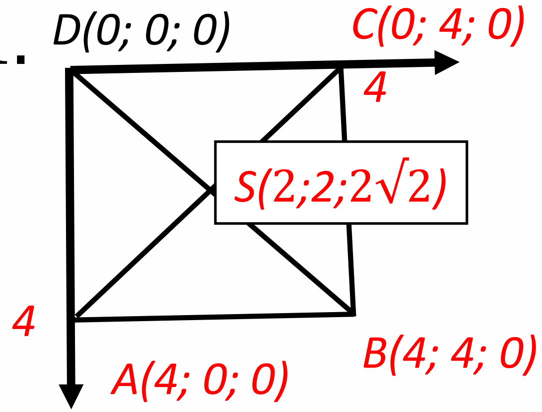
$$\rho = Пр_{\vec{n}}\, \vec{a} = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{a}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми AB и SC.



$$OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

1.



2. $A(4;\,0;\,0)$, $B(4;\,4;\,0)$, $S(2;\,2;\,2\sqrt{2})$, $C(0;\,4;\,0)$,

3. $\overrightarrow{AB}\ \{0;\,4;\,0\}$

$\overrightarrow{SC}\ \{-2;\,2;\,-2\sqrt{2}\}$

$\overrightarrow{AS}\ \{-2;\,2;\,2\sqrt{2}\}$

Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AS}$

4.

$$\rho(AB, SC) = \text{Пр}_{\vec{n}}\,\vec{a} = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{a}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми AB и SC.

$$\vec{n} \perp \vec{AB}, \quad \vec{n} \perp \vec{SC} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CD} = 0 \end{cases}$$

$\vec{n}\ \{x; y; z\}$

$\vec{AB}\ \{0; 4; 0\}$

$\vec{SC}\ \{-2; 2; -2\sqrt{2}\}$

$\vec{AS}\ \{-2; 2; 2\sqrt{2}\}$

$$\begin{cases} x \cdot 0 + y \cdot 4 + z \cdot 0 = 0 \\ x \cdot (-2) + y \cdot 2 + z \cdot \left(-2\sqrt{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\vec{a} = \vec{AS}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -2x = 2\sqrt{2}z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \vec{n}\left\{1; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$\vec{n}\left\{1; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$\vec{AS}\{-2; 2; 2\sqrt{2}\}$

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми AB и SC.

$\vec{n}\{x; y; z\}$

$\overrightarrow{AB}\{0; 4; 0\}$

$\overrightarrow{SC}\{-2; 2; -2\sqrt{2}\}$

$\overrightarrow{AS}\{-2; 2; 2\sqrt{2}\}$

Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AS}$

$\vec{n}\left\{1; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$\overrightarrow{AS}\{-2; 2; 2\sqrt{2}\}$

$$\rho = Пр_{\vec{n}}\vec{a} = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{a}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$\rho = \frac{\left|1\cdot(-2)+0\cdot 2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$$

$$\rho = \frac{\left|-2+0-2\right|}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\rho = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ