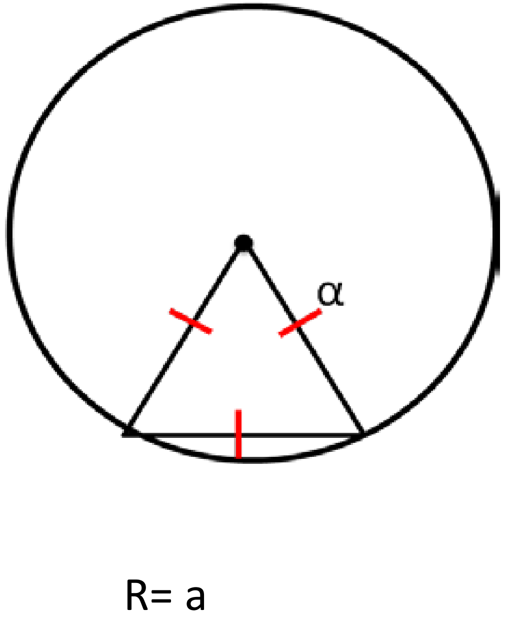
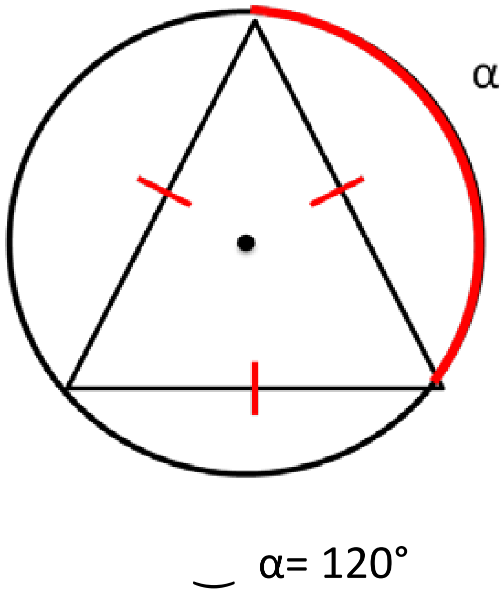
Способы решения задач по теме: «Окружность»

Пащенко Марина Петровна,
учитель математики, МБОУ гимназия №5
Усть-Лабинский район

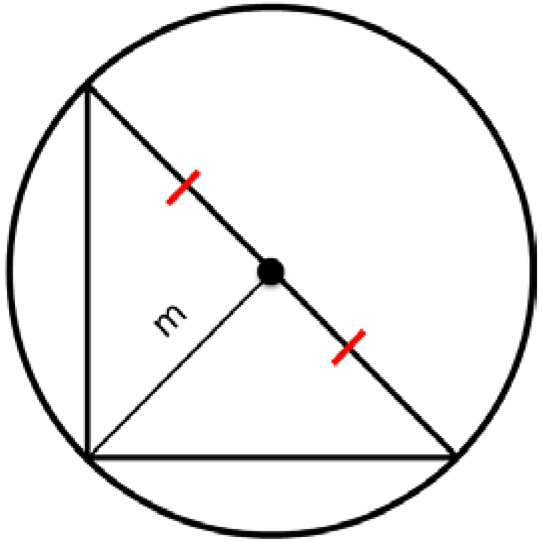
Признаки вспомогательной окружности





1. Если дан правильный треугольник, то можно провести окружность с центром в любой из его вершин и радиусом, равным длине его стороны, или описать около него окружность, которая разобьется вершинами треугольника на равные дуги по 120° каждая.

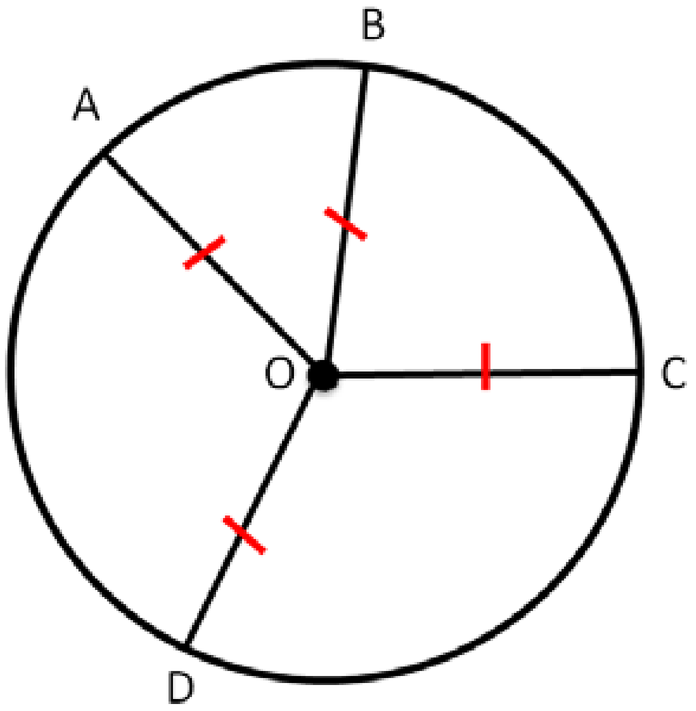
Признаки вспомогательной окружности



R=m

2. Если дан прямоугольный треугольник, то вокруг него описывается окружность, центром которой является середина гипотенузы, а радиус равен медиане, проведённой к гипотенузе этого треугольника

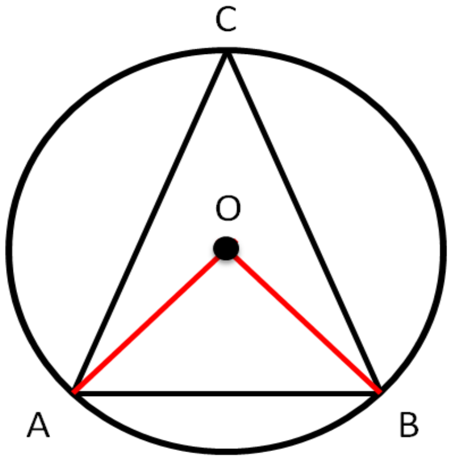
Признаки вспомогательной окружности

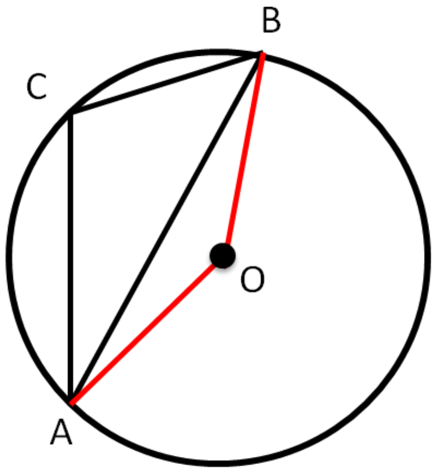


3. Если можно указать точку, равноудалённую от рассматриваемых четырех точек, то эти четыре точки будут лежать на одной окружности.

BO = CO = DO = AO

Признаки вспомогательной окружности





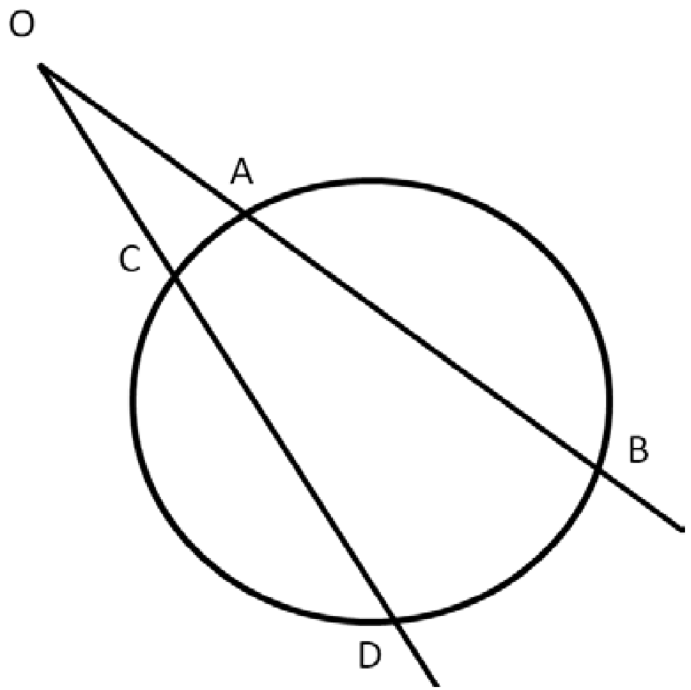
4. Пусть около треугольника ABC описана окружность с центром O. Если точки O и C лежат по одну сторону от прямой AB, то

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB.$$

Если же эти точки лежат по разные стороны от AB, то

$$\angle ACB + \frac{1}{2}\angle AOB = 180°.$$

Признаки вспомогательной окружности

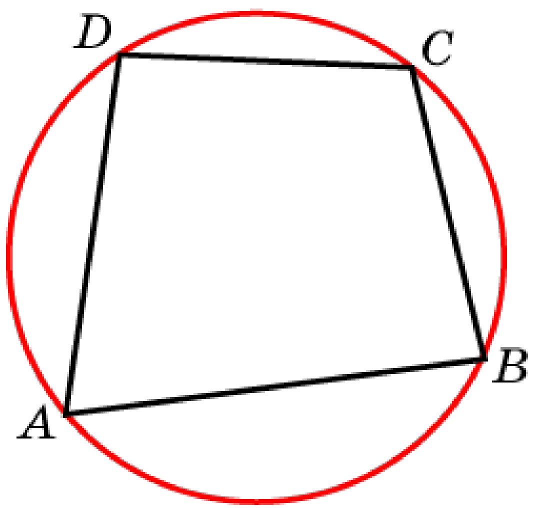


5. Если точки A и B лежат на одной стороне неразвернутого угла с вершиной O, точки C и D на другой, и при этом

$OA \cdot OB = OC \cdot OD$, то

четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

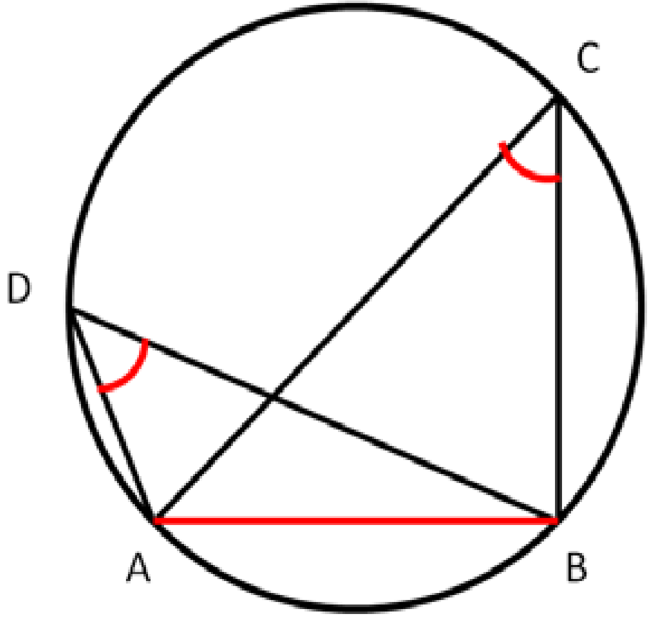
Признаки вспомогательной окружности



6. Если в четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180^0, то вокруг него можно описать окружность

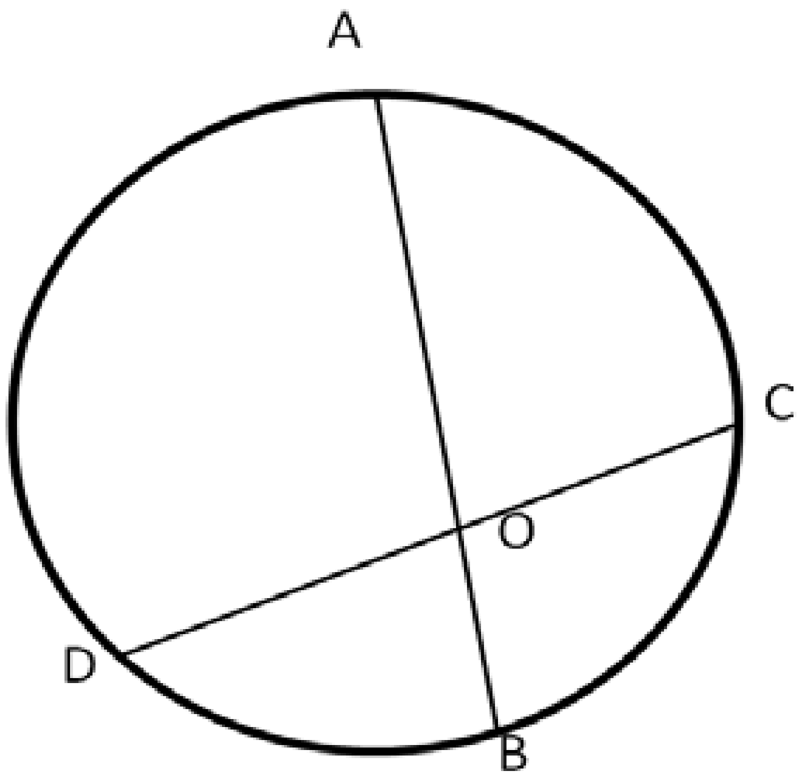
$$\boxed{\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0}$$

Признаки вспомогательной окружности



7. Если отрезок AB из точек C и D виден под равными углами, то четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности

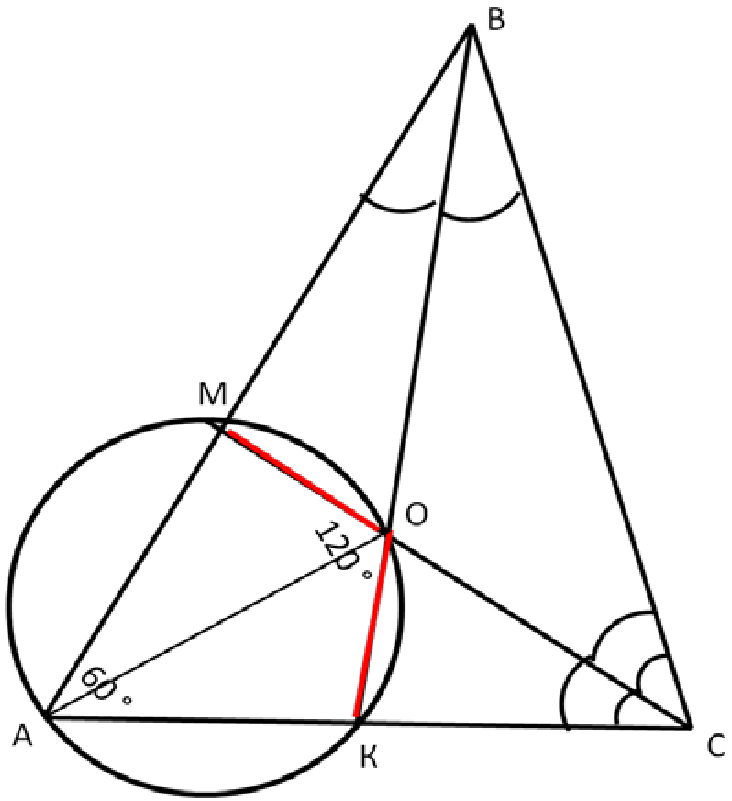
Признаки вспомогательной окружности



8. Если отрезки AB и CD пересекаются в точке O, и при этом $OA \cdot OB = OC \cdot OD$, то четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

ОГЭ. Задание №24

Задача 1. Биссектрисы ВК и СМ треугольника АВС пересекаются в точке О, угол А равен 60°. Доказать ОК= ОМ.

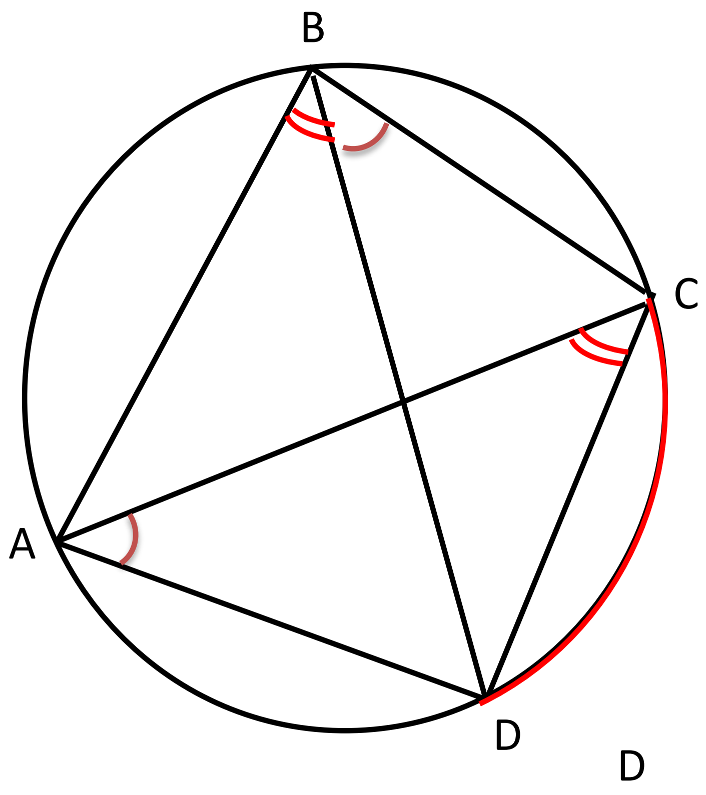


Доказательство:

1. Δ ABC: $\angle$ A=60°, тогда $\angle$ B+ $\angle$C =120°
2. ВК и СМ- биссектрисы, тогда $\frac{1}{2}\angle$B+ $\frac{1}{2}\angle$ C = $= \frac{1}{2}\cdot 120°=60°$
1. В Δ ВОС: $\angle$ ВОС = 180°-60°=120°
2. $\angle$ МОК = $\angle$ВОС =120°, как вертикальные
3. В четырёхугольнике АМОК: $\angle$ А+ $\angle$МОК =180°, следовательно точки А, М, О, К лежат на одной окружности
4. АО – биссектриса $\angle$ А, тогда $\angle$ МАО= $\angle$ КАО, следовательно $\smile$МО= $\smile$ОК, тогда МО = ОК, как хорды, стягивающие равные хорды, ч.т.д.

ОГЭ. Задание №24

Задача 2. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

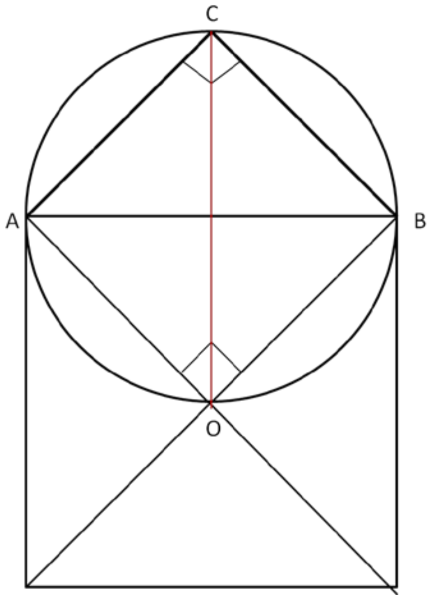


Доказательство:

1. Так как углы ABD и ACD равны и их вершины лежат по одну сторону от прямой AD, то точки A,B,C, D лежат на одной окружности
2. Тогда углы DAC и DBC, вписанные в окружность, опираются на одну и ту же дугу DC, значит $\angle DAC = \angle DBC$ ч.т.д.

ЕГЭ. Задание №17

Задача 1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Доказать, что CO- биссектриса прямого угла



Доказательство:

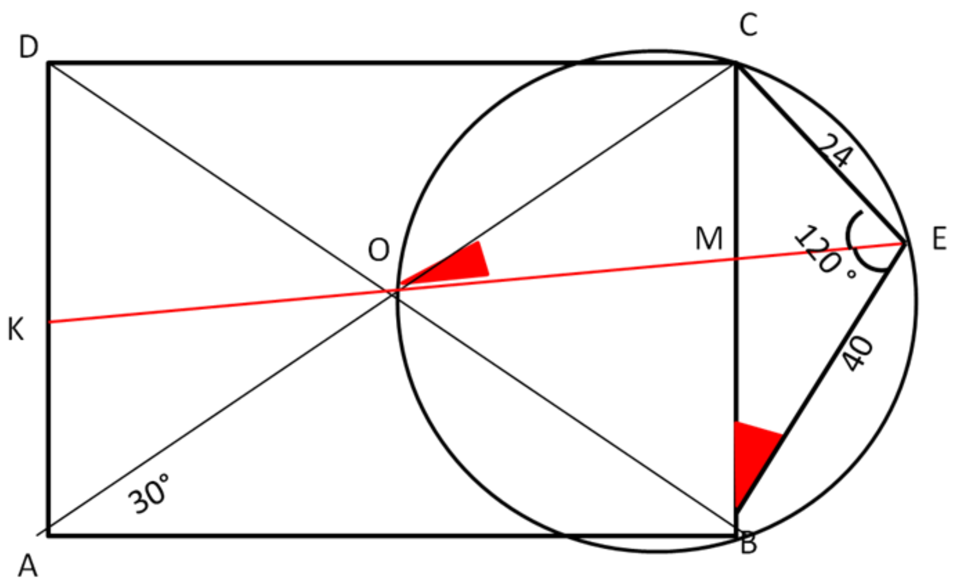
1. Четырехугольник ACBO: $\angle C=90°$(по условию); $AOB=90°$(диагонали квадрата перпендикулярны) ⇒ отрезок AB из точек C и O виден под прямым углом ⇒ A,C,B, и O лежат на окружности с диаметром AB.

2. $AO=OB$ (диагонали квадрата в точке пересечения делятся пополам)⇒ $\smile A\,O=\smile\,OB$

⇒ CO - биссектриса прямого угла C , ч.т.д.

ЕГЭ. Задание №17

Задача 2. Диагональ AC прямоугольника ABCD с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причем *BEC=120°*
а) Докажите, что *CBE* = *COE*



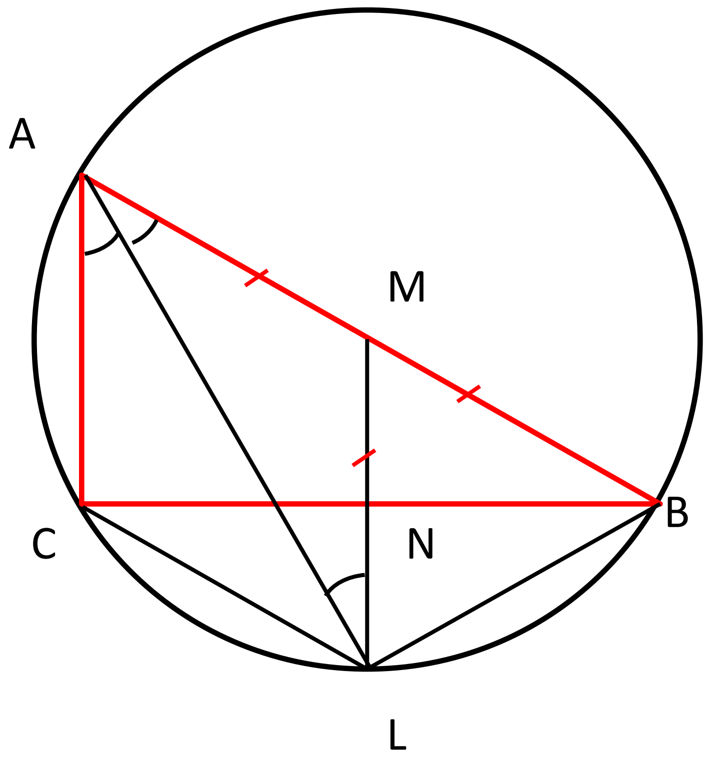
Доказательство:

1. OAB = OBA = 30°
2. COB- внешний для ΔAOB, значит COB = 60°
3. В четырехугольнике COB+ CEB= = 60°+ 120° = 180°, тогда около OCEB можно описать окружность
4. CBE= COE, как вписанные опирающиеся на одну и ту же дугу, ч.т.д.

ЕГЭ. Задание №17

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N- середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.



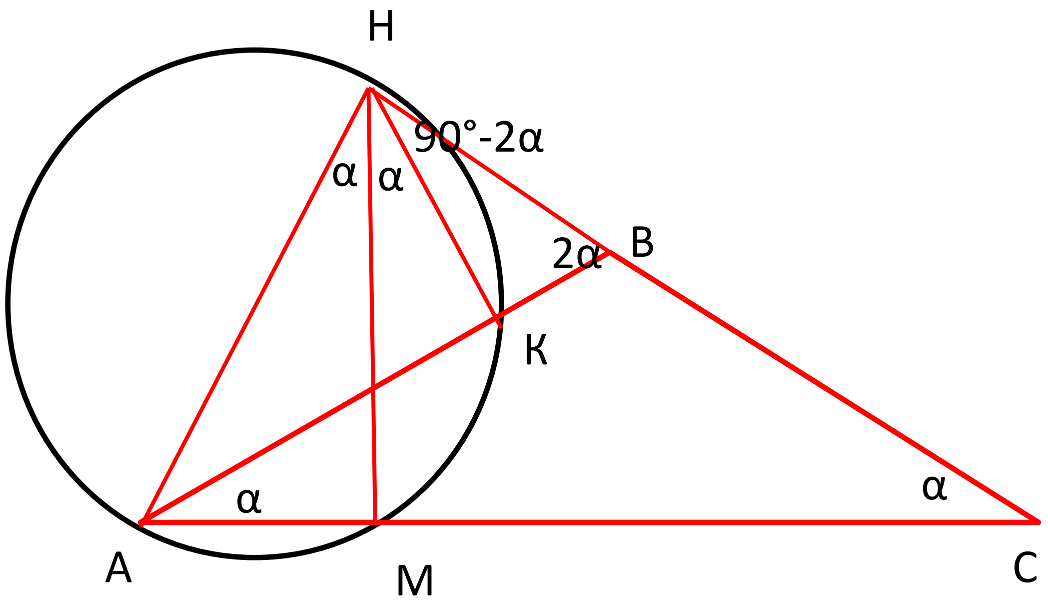
Доказательство:

1. MN – средняя линия в Δ ABC. Значит MN ∥ AC, тогда $\angle$CAL= α= $\angle$ALM, как внутренние накрест лежащие, следовательно ΔAML- равнобедренный и AM = LM
2. В Δ ABC: CM- медиана в прямоугольном треугольнике, следовательно CM=AM=BM. Получаем AM=CM=LM=BM=R, где R- радиус окружности, описанной около ABLC.
3. Δ AML ~ΔBLC по 2 углам ($\angle$ BCL= $\angle$ MAL=α, так как опираются на одну дугу BL; $\angle$CBL = $\angle$AML=α, так как опираются на одну дугу CL), ч.т.д.

ЕГЭ. Задание №17

Задача 4. В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны



Доказательство:

1. ∠AMH= ∠AKH=90°. Они равны и опираются на отрезок AH, значит можно описать окружность около четырёхугольника AHKM.
2. ΔABC – равнобедренный. Пусть ∠BAC = ∠BCA = α
3. ∠ABH=2α , как внешний угол для ΔABC
4. В ΔBKH: ∠ BHK= 90°-2α
5. ∠ MAK=∠MHK= α, так как опираются на одну дугу MK
6. В ΔABH ∠ AHM= 90º- (90º -2α + α)= α
7. Так как ∠AHM= ∠ MHK, то они стягивают равные хорды, значит AM = MK, ч.т.д.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ,

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ!