«Нестандартные подходы к решению неравенств».

Попова Ирина Николаевна,
учитель математики,
МБОУ СОШ № 6 им. Ю. А. Гагарина
Кавказский район

Метод интервалов

Методом интервалов решают неравенства вида

$f(x)>0$, ($f(x)<0$, $f(x)\le 0$, $f(x)\ge 0$)

Алгоритм метода интервалов.

1. Находим область определения функции $f(x)$ и промежутки, на которых функция непрерывна.

2. Находим нули функции, то есть решения уравнения $f(x)=0$.

3. На числовую прямую наносим область определения и нули функции $f(x)$, причём ***в случае строгого знака неравенства нули «выкалываем».***

4. Определяем интервалы знакопостоянства функции $f(x)$.

5. В соответствии с заданным знаком неравенства, записываем ответ.

Если точка является нулем функции или не принадлежит области определения функции, это НЕ ОЗНАЧАЕТ, что при переходе через такую точку функция автоматически меняет знак, а промежутки знакопостоянства чередуются.

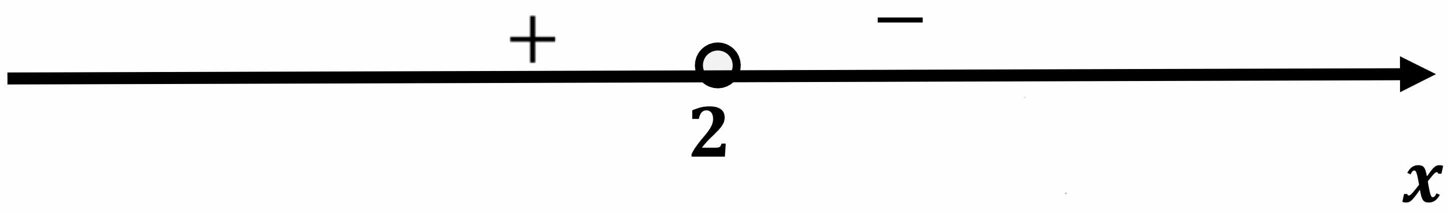
Пример 1. Решите неравенство: $4 - 2x > 0$

Решение: рассмотрим линейную функцию $f(x) = 4 - 2\,x$

Найдем нуль функции, или решим линейное уравнение:

$$4 - 2x = 0$$

$$x = 2$$



Выберем интервал, на котором *f*(*x*) *>0*.

Ответ: (-∞;*2*).

Решение

Рассмотрим *f(x)*= $(3x+10)\log_{2x+7}(x^2+6x+10)$.

Область определения функции задается системой $\begin{cases} 2x+7>0, \\ 2x+7\neq 1 \\ x^2+6x+10 \end{cases}$

$$\begin{cases} x>-3{,}5, \\ x\neq -3 \end{cases}$$

$$D(f)=(-3{,}5;-3)\cup(-3;\ +\infty)$$

Воспользуемся формулой рационализации

- $\log_{a(x)} g(x) \sim (a(x) - 1)(g(x) - 1)$

и преобразуем *f(x) в g(x)*:

$$g(x) = (3x + 10)(2x + 7 - 1)(x^2 + 6x + 10 - 1)$$

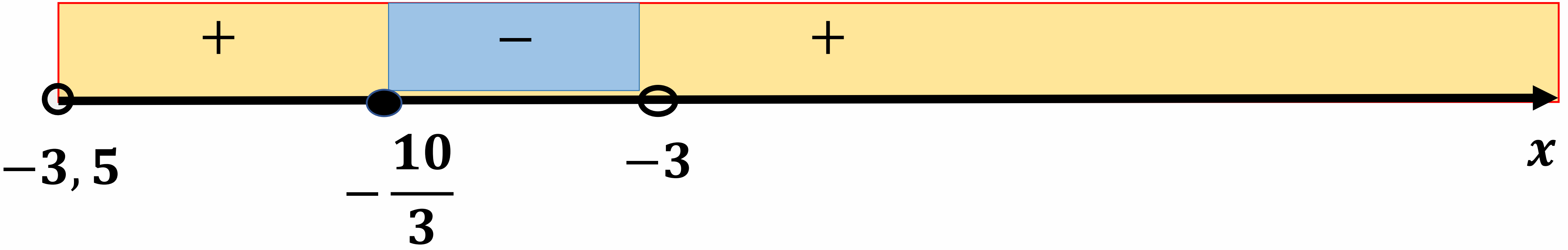
$$g(x) = (3x + 10)(2x + 6)(x^2 + 6x + 9)$$

$$g(x) = 2(3x + 10)(x + 3)^3$$

Нули функции: $\left[\begin{array}{l} 3x + 10 = 0, \\ x + 3 = 0 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-10}{3}, \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Заметим, что точка $x = -3$ имеет нечетную кратность, а $x = -3{,}5$ является граничной точкой области определения.



Выбираем интервалы, на которых $g(x) \geq 0$.

Ответ: $\left(-3{,}5; \dfrac{-10}{3}\right]; (-3; +\infty)$

Пример 3. Решить неравенство: $log_{6x^2-x-1}(2x^2-5x+3) \geq 0$

Решение.

$$log_{6x^2-x-1}(2x^2-5x+3) = \frac{ln(2x^2-5x+3)}{ln(6x^2-x-1)}$$

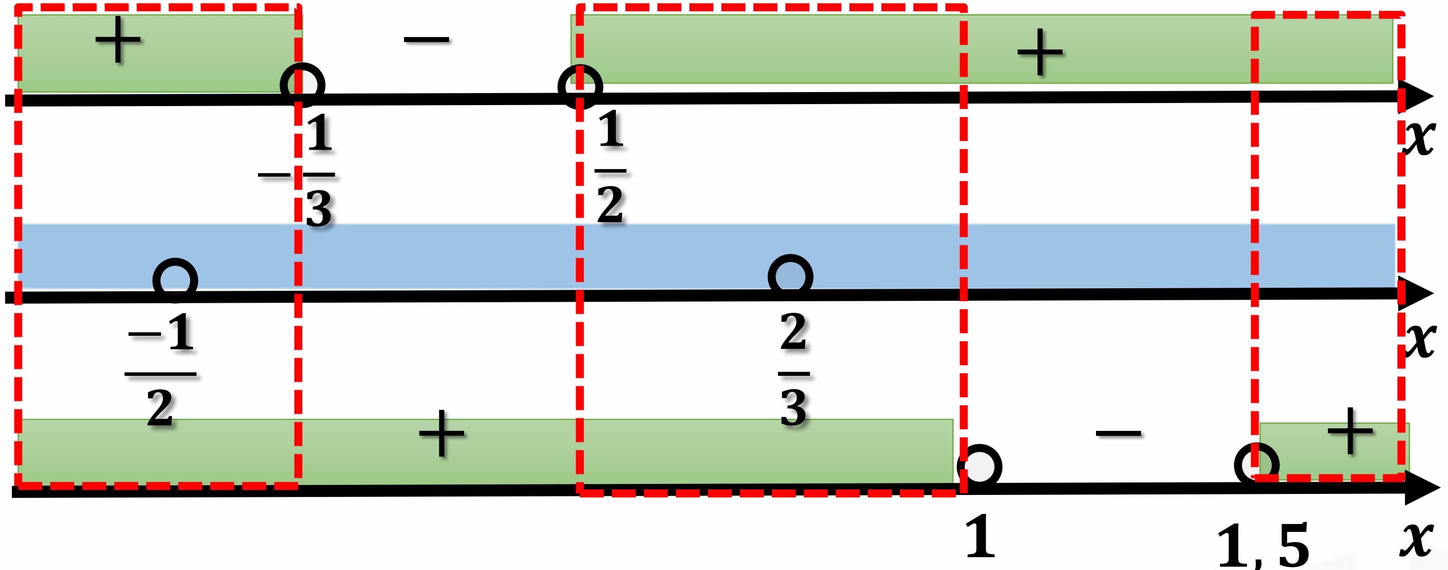
$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

$$\frac{ln(2x^2-5x+3)}{ln(6x^2-x-1)} \geq 0$$

Рассмотрим $f(x) = \frac{ln(2x^2-5x+3)}{ln(6x^2-x-1)}$ и найдем *D(f)*:

$$\begin{cases} 6x^2-x-1>0, \\ 6x^2-x-1 \neq 1, \\ 2x^2-5x+3>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-1)(3x+1)>0, \\ (2x+1)(3x-2) \neq 0, \\ (x-1)(2x-3)>0; \end{cases}$$



$$D(f) = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1{,}5; +\infty)$$

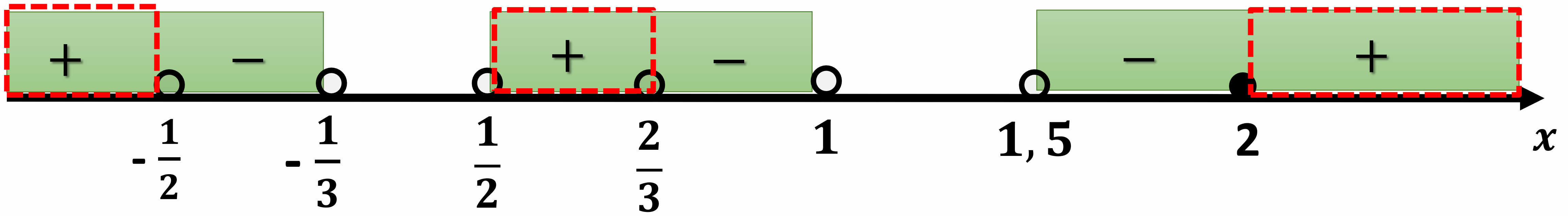
Нули функции: $ln(2x^2 - 5x + 3) = 0,$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1,$$
$$2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2} \notin D(f)$$

С учетом найденной области определения, которая выделена зелёным цветом:



Выбираем интервалы, где $f(x) \geq 0$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right) \cup [2;\ +\infty).$

Пример 4. Решить неравенство $0{,}3^{2x^2-3x+6} < 0{,}00243$

Решение

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию e (по любому основанию, больше 1) и преобразуем его, используя свойство логарифма:

$$(2x^2 - 3x + 6)ln0{,}3 < ln0{,}00243$$

$$(2x^2 - 3x + 6)ln0{,}3 - ln0{,}00243 < 0$$

$$(2x^2 - 3x + 6)ln0{,}3 - 5ln0{,}3 < 0$$

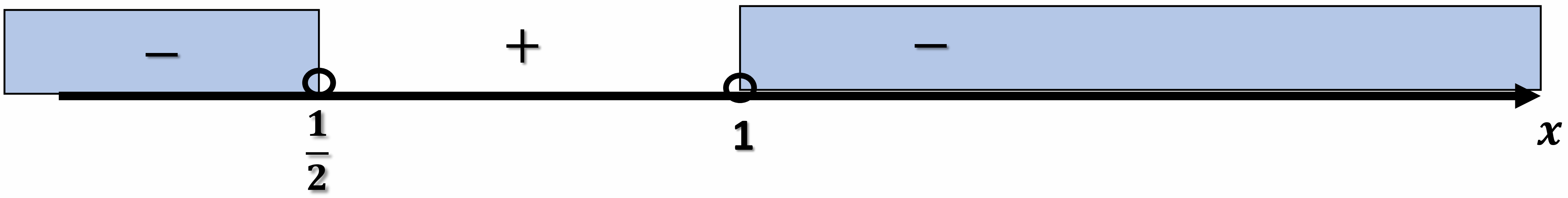
$$(2x^2 - 3x + 1)ln0{,}3 < 0$$

Обозначим $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)ln0{,}3$, $D(f)$=R

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Так как $ln0{,}3 < ln1 = 0$



Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right), (1;\ +\infty)$

Пример 5. Решить $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$

Решение. Так как обе части неравенства положительны, то прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2:

$$\log_2 \sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > \log_2 2,$$

$$\log_2 \sqrt{x} \log_2 \sqrt{x} - \log_2 2 > 0,$$

$$(\log_2 \sqrt{x})^2 - 1 > 0,$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (log_2 \sqrt{x})^2 - 1$

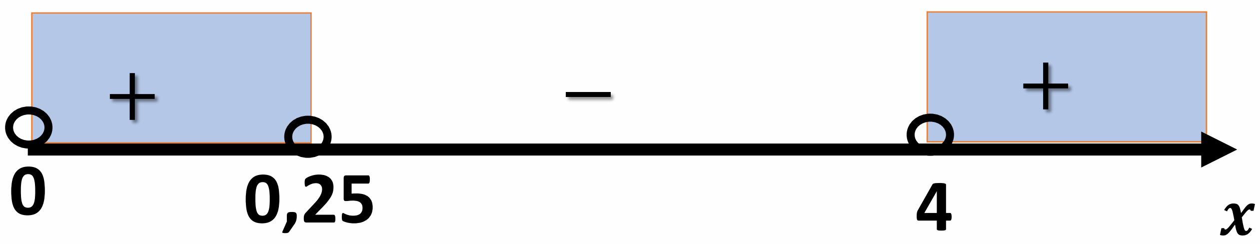
$D(f) = (0;\ +\infty)$

$$\left(\log_2\sqrt{x}-1\right)\left(\log_2\sqrt{x}+1\right)>0$$

Найдем нули функции

$$\left[\begin{array}{l}\log_2\sqrt{x}-1=0\\ \log_2\sqrt{x}+1=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$



$f(x)>0$ при $x\in(0;\ 0{,}25)\cup(4;\ +\infty)$

Ответ: $(0;\ 0{,}25)\cup(4;\ +\infty)$

Спасибо за внимание