Нестандартные методы решения задач

Романова Оксана Анатольевна

учитель математики
МАОУ гимназии №23 г. Краснодара

Математика — основа интеллекта, критического мышления и ориентации в сложном информационном пространстве

Возникает необходимость кропотливого поиска таких приемов методики преподавания и организации учебного процесса

не заставлять насильно делать неинтересное

чтобы ученику «захотелось» понять и учить математику

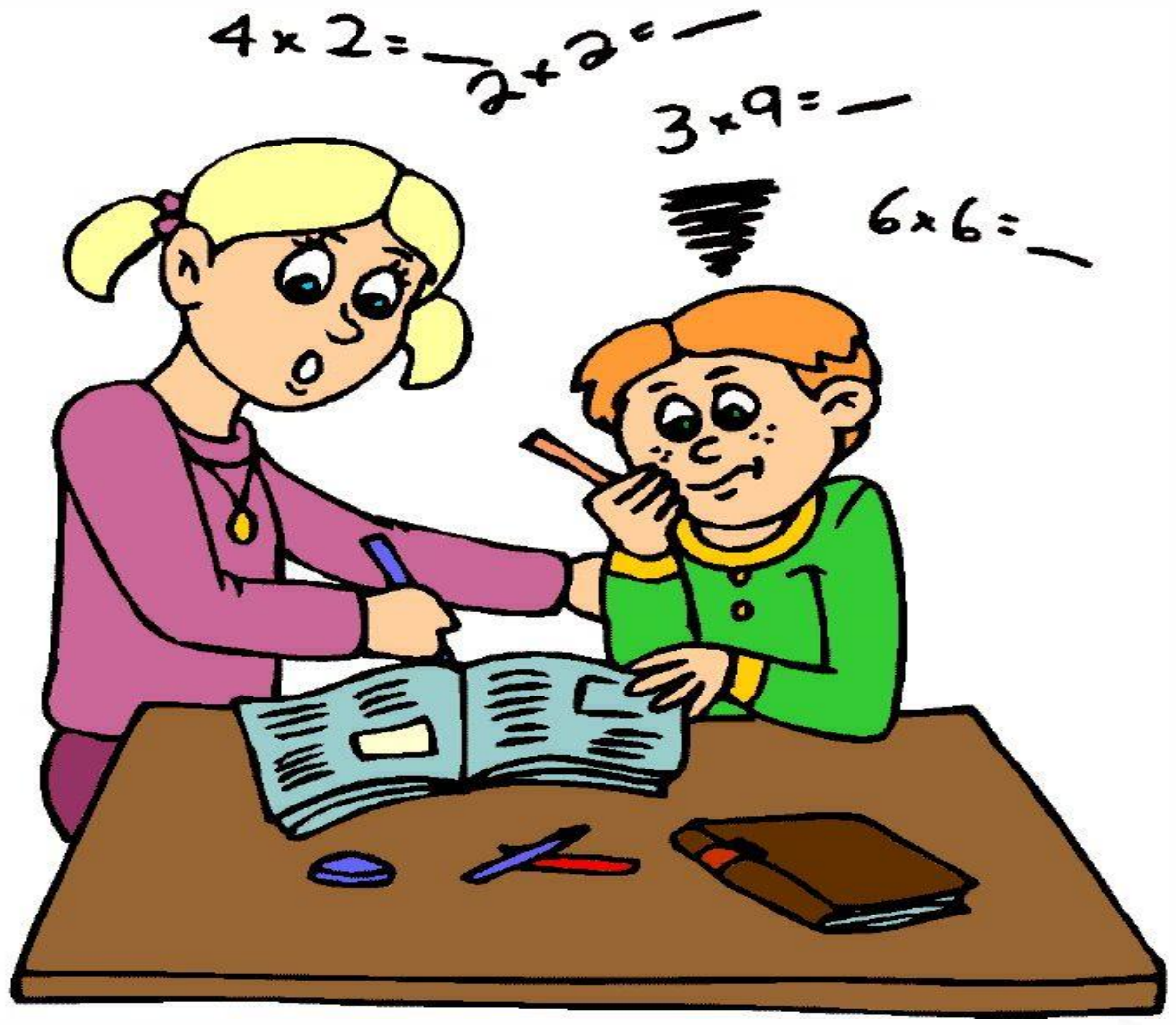
Одна из главных задач школы

не только сообщение определенной суммы знаний учащимися

но и развитие у учащихся познавательных интересов, творческого отношения к делу, стремления к самостоятельному «добыванию» и расширению знаний и умений, совершенствованию умения применять их в своей практической деятельности

Умение заинтересовать математикой – дело непростое

Многое зависит от того, как поставить даже очевидный вопрос, и от того, как вовлечь всех учащихся в обсуждение сложившейся ситуации. Творческая активность учащихся, успех урока целиком зависит от методических приемов, которые выбирает учитель. Как сформировать интерес к предмету у ребенка? Прежде всего через самостоятельность и поисковую деятельность на уроке



Способствует самостоятельной и поисковой деятельности решение нестандартных задач и задач повышенной сложности.

Для развития творческих способностей учащихся наиболее ценными являются сложные и нестандартные задачи

Решение сложных задач по математике во многом зависит от опыта их решения, от степени овладения методами их решения и техникой преобразований

Нестандартные задачи – это задачи, для решения которых у учащихся нет готового алгоритма и нужен самостоятельный поиск ключевой идеи

- При решении нестандартных задач формируется математическая культура, воспитывается гибкость ума и осуществляется постижение единства математики.

Важнейшим источником нестандартных задач являются олимпиадные и конкурсные задания

Умение удачно ввести новую переменную – важнейший элемент математической культуры школьника

Особенно трудно учащимся представить себе, что вместо переменной можно подставить тригонометрическую функцию, поскольку при этом, как кажется, алгебраическое выражение усложняется

- Однако известные свойства тригонометрических функций упрощают некоторые уравнения, неравенства и их системы, в то время как прямое алгебраическое решение оказывается более сложным технически. Таким образом, тригонометрическую подстановку можно назвать нестандартным методом решения стандартных по постановке задач – уравнений, неравенств и их систем

Пример 1

- Решить уравнение

$$x^2\sqrt{1-x^2} = |x|^3 - |x| + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2} - |x|^3 + |x| - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Область определения $D(f) = [-1;1]$ симметрична относительно

начала координат и $f(-x) = f(x)$, тогда

$f(x)$ – чётная по определению. Следовательно, можно искать решение

(1) на интервале $[0;1]$.

$$x=\sin t,\quad t\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}=\sin^3 t-\sin t+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^2 t\cdot\cos t=\sin t\cdot\left(\sin^2 t-1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^2 t\cdot\cos t+\sin t\cdot\cos^2 t=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin t\cdot\cos t\cdot\left(\sin t+\cos t\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin t + \cos t = y, \quad |y| \le \sqrt{2}$$

$$\sin t \cdot \cos t = \frac{y^2 - 1}{2}$$

$$\frac{y^2 - 1}{2} \cdot y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y^3 - y - \sqrt{2} = 0$$

$$(y - \sqrt{2})(y^2 + \sqrt{2}y + 1) = 0$$

$$y - \sqrt{2} = 0$$

$$y = \sqrt{2}$$

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2}$$

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \sin t = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Задание №2

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4xy(2y^2 - 1) = 1 \end{cases}$$

Присутствие $x^2 + y^2 = 1$ позволяет сделать замену:

$$x = \sin\alpha, \quad y = \cos\alpha, \quad \alpha \in [0; 2\pi)$$

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$4\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = 1$$

$$2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 1$$

$$\sin 4\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z$$

$$\alpha \in [0; 2\pi)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8}; \quad \alpha = \frac{5\pi}{8}; \quad \alpha = \frac{9\pi}{8}; \quad \alpha = \frac{13\pi}{8}$$

$$x = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$y = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Аналогично для трёх оставшихся значений

Ответ:

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

«Знание только тогда знание, когда оно приобретено усилиями своей мысли, а не памятью»

Л.Н.Толстой

- Спасибо за внимание