ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Старший преподаватель

кафедры МИТО ГБОУ ИРО

Краснодарского края

Власова Александра Анатольевна

Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе

$$S = \frac{1}{2}ab$$

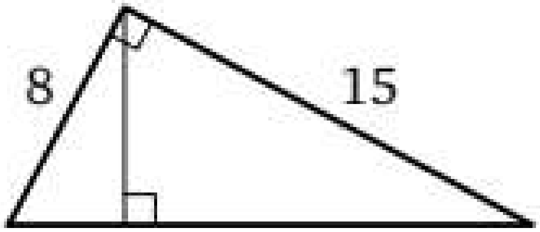
$$S = \frac{1}{2}ch$$

$$ch = ab$$

$$h = \frac{ab}{c}$$

Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.

Ответ: $\frac{120}{17}$.



Р е ш е н и е. Гипотенуза треугольника равна

$$\sqrt{15^2+8^2}=17.$$

Следовательно, искомая высота равна $\frac{15\cdot 8}{17}=\frac{120}{17}$. ◁

Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону

Дан треугольник со сторонами a, b и b. Найдите высоту, опущенную на сторону, равную b.

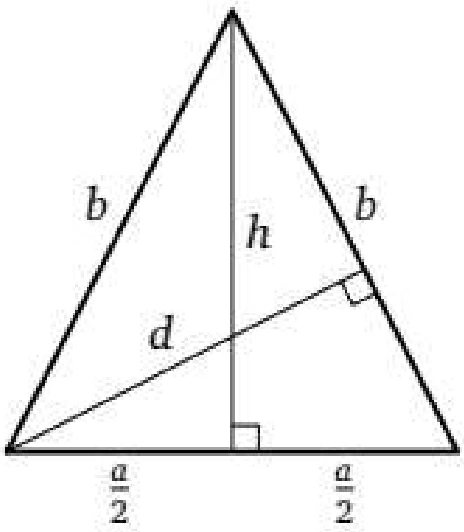
Ответ: $\dfrac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}$.

Решение. Пусть d — искомая высота, h — высота, опущенная на основание данного равнобедренного треугольника. Тогда

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}.$$

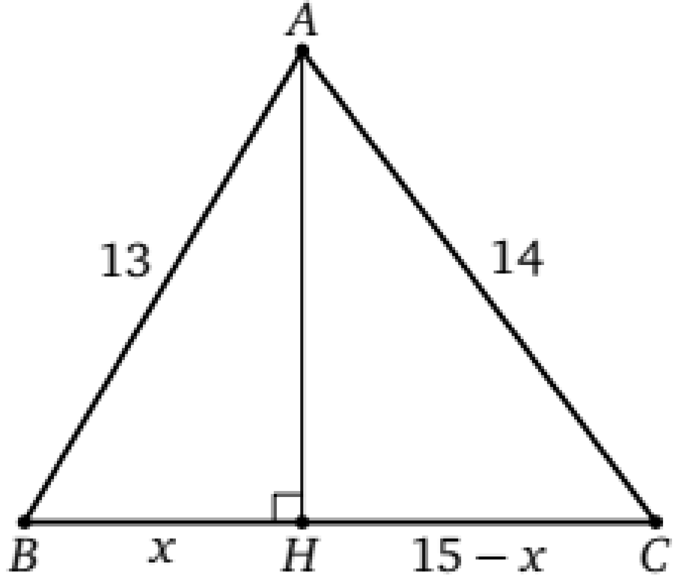
С одной стороны, площадь треугольника равна $\frac{1}{2}ah$, с другой — $\frac{1}{2}bd$. Из равенства $ah=bd$ находим, что

$$d=\frac{ah}{b}=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2}:b=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}.$$ ◁



Р е ш е н и е 1. Пусть AH — указанная высота треугольника ABC со сторонами $BC = 15$, $AC = 14$, $AB = 13$. По формуле Герона

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84.$$



С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$. Откуда находим, что

$$AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{56}{5}.$$

◁

Р е ш е н и е 2. Поскольку BC — наибольшая сторона треугольника ABC, то точка H лежит на стороне BC. Обозначим $BH = x$. Тогда $CH = BC - BH = 15 - x$. В прямоугольных треугольниках AHB и AHC

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 169 - x^2 \quad \text{и} \quad AH^2 = AC^2 - CH^2 = 196 - (15 - x)^2.$$

Из уравнения $169 - x^2 = 196 - (15 - x)^2$ находим, что $x = \frac{33}{5}$. Следовательно,

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{33}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{65^2 - 33^2}{25}} =$$

$$= \sqrt{\frac{32 \cdot 98}{25}} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 2}{5} = \frac{56}{5}. \quad \lhd$$

Р е ш е н и е 3. Пусть AH — указанная высота треугольника ABC со сторонами $BC = 15$, $AC = 14$, $AB = 13$. По теореме косинусов

$$\cos\angle ABC = \frac{225+169-196}{2\cdot 15\cdot 13} = \frac{33}{65},$$

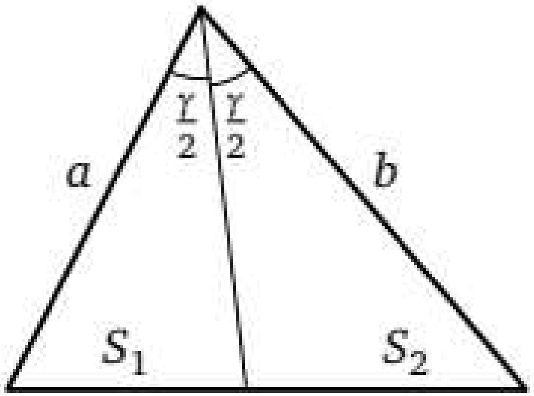
а из прямоугольного треугольника ABH находим, что

$$AH = AB\sin\angle ABC = 13\sqrt{1-\left(\frac{33}{65}\right)^2} = \frac{56}{5}. \qquad \triangleleft$$

Биссектриса

Стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен γ. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

Ответ: $\dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$.



Р е ш е н и е. Пусть S — площадь данного треугольника, S_1 и S_2 — площади треугольников, на которые указанная биссектриса, равная l, разбивает данный треугольник.

Тогда $S = S_1 + S_2$, или

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}al\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}bl\sin\frac{\gamma}{2},$$

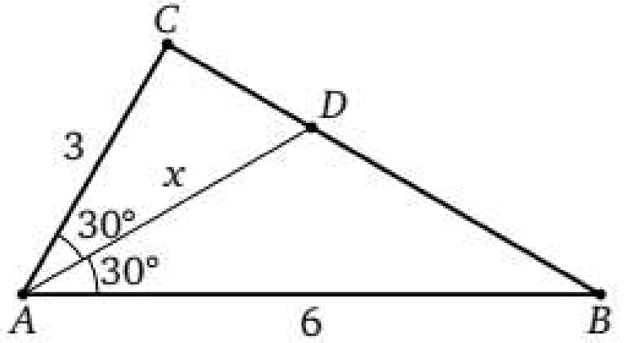
или $\quad ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(a+b)l\sin\frac{\gamma}{2}.$

Поскольку $\sin\frac{\gamma}{2}$ отличен от нуля, $l = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$. $\triangleleft$

Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60°. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB=6$, $AC=3$, $\angle BAC=60°$.



Первый способ. Обозначим $AD=x$. Тогда

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin 30°+\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin 30°=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{4}x.$$

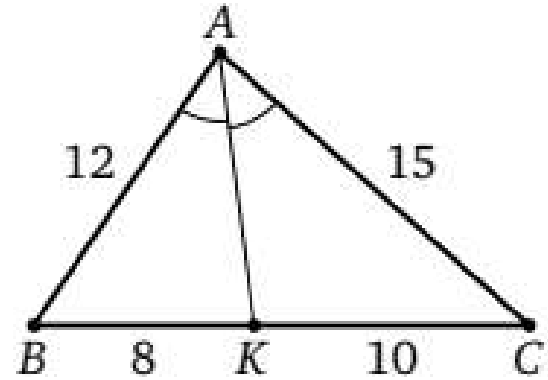
Из уравнения $\frac{9}{4}x=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ находим, что $x=2\sqrt{3}$.

Вычислите биссектрису треугольника ABC, проведённую из вершины A, если $BC=18$, $AC=15$, $AB=12$.

Ответ: 10.

Р е ш е н и е. Пусть AK — биссектриса треугольника ABC. Тогда

$$\frac{CK}{BK}=\frac{AC}{AB}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}.$$



Поэтому $BK=\frac{4}{9}BC=\frac{4}{9}\cdot 18=8.$

По теореме косинусов из треугольника ABC находим, что

$$\cos\angle B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{144+324-225}{2\cdot 12\cdot 18}=\frac{9}{16}.$$

Следовательно,

$$AK^2=AB^2+BK^2-2AB\cdot BK\cos\angle B=144+64-108=100,\quad AK=10.$$

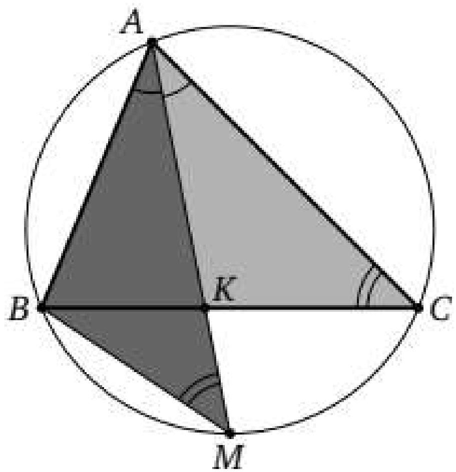
◁

Утверждение. *Квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.*

Доказательство. Пусть M — точка пересечения продолжения биссектрисы AK треугольника ABC с описанной около этого треугольника окружностью. Тогда треугольник ACK подобен треугольнику AMB по двум углам. Поэтому

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AC}{AM}, \quad \text{или} \quad AK(AK+KM) = AB\cdot AC,$$

$$AK^2 + AK\cdot KM = AB\cdot AC.$$



Следовательно,

$$AK^2 = AB\cdot AC - AK\cdot KM = AB\cdot AC - BK\cdot KC$$

($AK\cdot KM = BK\cdot KC$ по теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд). Что и требовалось доказать. □

Пусть уже найден отрезок BK. Тогда $CK = BC - BK = 18 - 8 = 10$. По формуле для квадрата биссектрисы треугольника находим, что

$$AK^2 = AB\cdot AC - BK\cdot CK = 12\cdot 15 - 8\cdot 10 = 180 - 80 = 100.$$

Следовательно, $AK = 10$.

Условие

В треугольнике ABC угол C равен 60^0, а биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон AC и BC относятся как 5:2 соответственно. Найдите тангенс угла A и сторону BC.

Подсказка

Пусть CD — биссектриса данного треугольника. Обозначим $BC = 2t$, $AC = 5t$. Найдите t из уравнения

$$S_{\Delta\,\mathrm{ABC}} = S_{\Delta\,\mathrm{BCD}} + S_{\Delta\,\mathrm{ACD}}$$

Решение

Пусть $CD = 5\sqrt{3}$ — биссектриса данного треугольника. Обозначим $BC = 2t$, $AC = 5t$. Тогда

$$S_{\Delta\,\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC\sin 60^0 = \frac{5}{2}t^2\sqrt{3},$$

$$S_{\Delta\,\mathrm{ABC}} = S_{\Delta\,\mathrm{BCD}} + S_{\Delta\,\mathrm{ACD}} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\sin 30^0 + \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\sin 30^0 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot 5\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 5t\cdot 5\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 7t\cdot 5\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{35}{4}t\sqrt{3}.$$

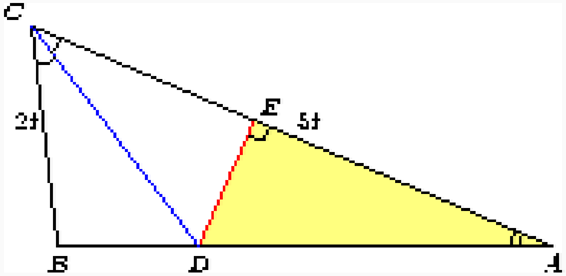
Из уравнения $\frac{5}{2}t^2\sqrt{3} = \frac{35}{4}t\sqrt{3}$ находим, что $t = \frac{7}{2}$. Тогда $BC = 2t = 7$, $AC = 5t = \frac{35}{2}$.

Пусть E — проекция точки D на прямую AC. Поскольку $BC < AC$, то $\angle DAC = \angle BAC < 90^\circ$, поэтому точка E лежит на стороне AC, а не на её продолжении.

Тогда из прямоугольных треугольников CED и AED находим, что

$$DE = CD\sin 30^\circ = \frac{1}{2}CD = \frac{5\sqrt{3}}{2},\ CE = CD\cos 30^\circ = 5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}.$$

$$AE = AC - CE = \frac{35}{2} - \frac{15}{2} = 10,\ tg\angle DAE = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



Ответ

$\frac{\sqrt{3}}{4}$; 7.

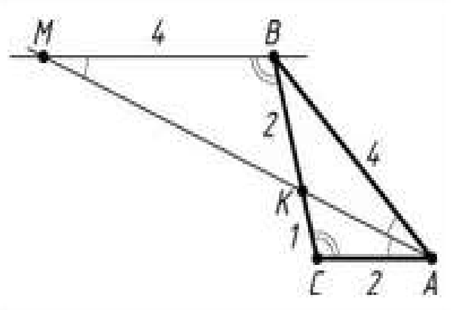
Условие

Дан треугольник ABC. Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите KM.

Решение

По свойству биссектрисы треугольника $BK : KC = AB : AC = 2 : 1$. Поэтому $BK = 2$, $KC = 1$.
Поскольку треугольники ACK и MBK подобны по двум углам, $KM = 2AK$.

$AK^2 = AB{\cdot}AC - BK{\cdot}KC = 6.$



Ответ

$2\sqrt{6}.$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!