Особенности построения и анализа графиков функций, содержащих модуль

Власова Александра Анатольевна
Старший преподаватель кафедры МИТО
ГБОУ ИРО Краснодарского края

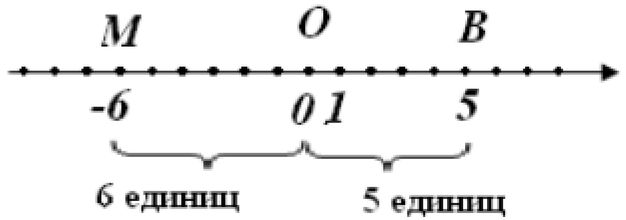
Задание 22 в материалах ОГЭ

Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели

Определение модуля:

геометрическая интерпретация

Модулем числа называется расстояние (в единичных отрезках) **от начала отсчёта до точки, изображающей это число на координатной прямой.**



$$|-6| = 6|5| = 5$$

аналитическая интерпретация

Модулем действительного числа *a* называется само это число, если $a \geq 0$,
и противоположное число – *a*, если *a* < 0:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

$$|0| = 0$$

Построить график функции $y = \left|(x+1)^2 - 4\right|$

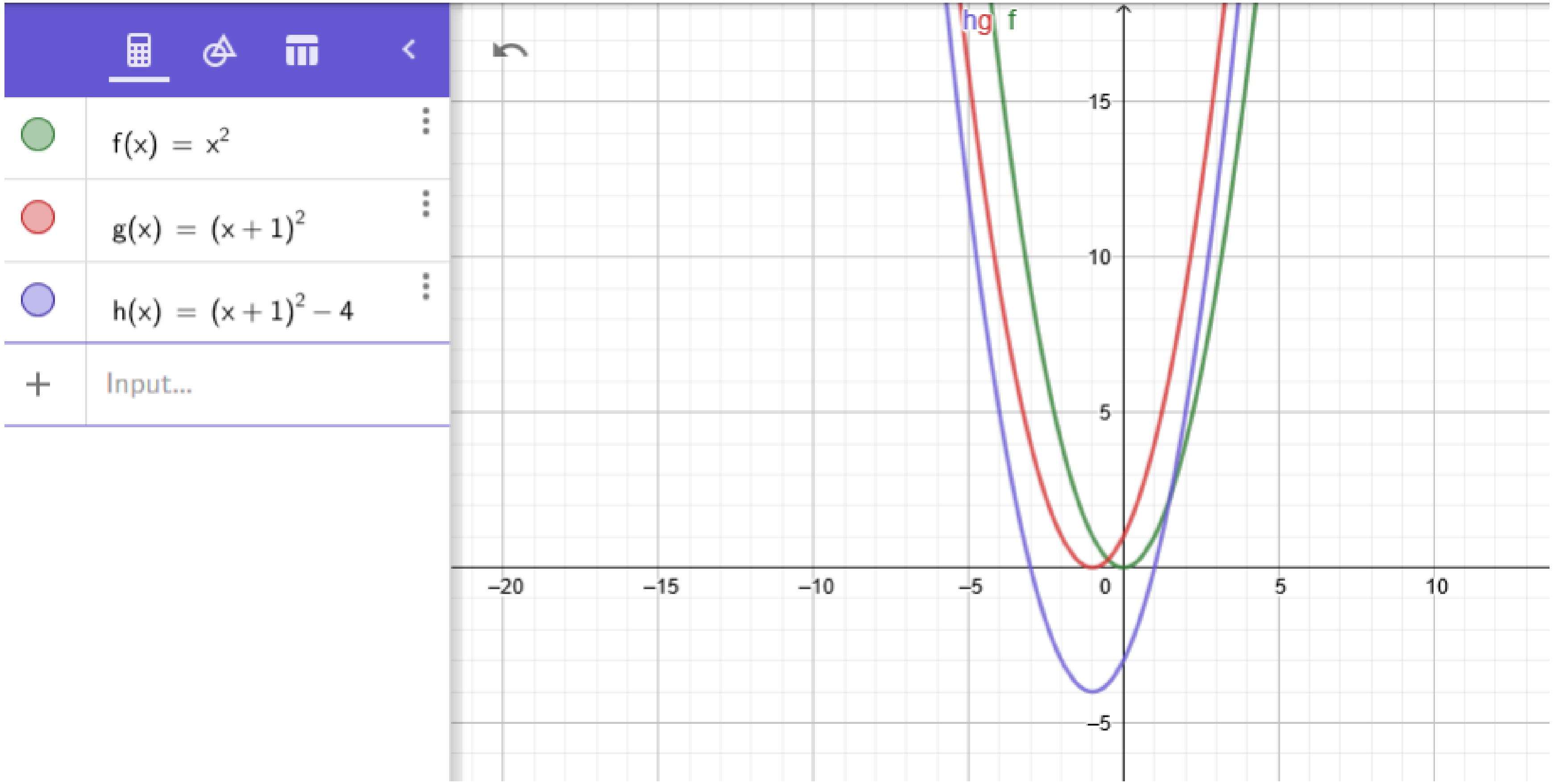
1. Строим график функции $y = (x+1)^2 - 4$

- Построим график функции $y = x^2$
- Сместим его на 1 масштабную единицу влево по оси ОХ
- Осуществим сдвиг на 4 единицы вниз по оси ОУ

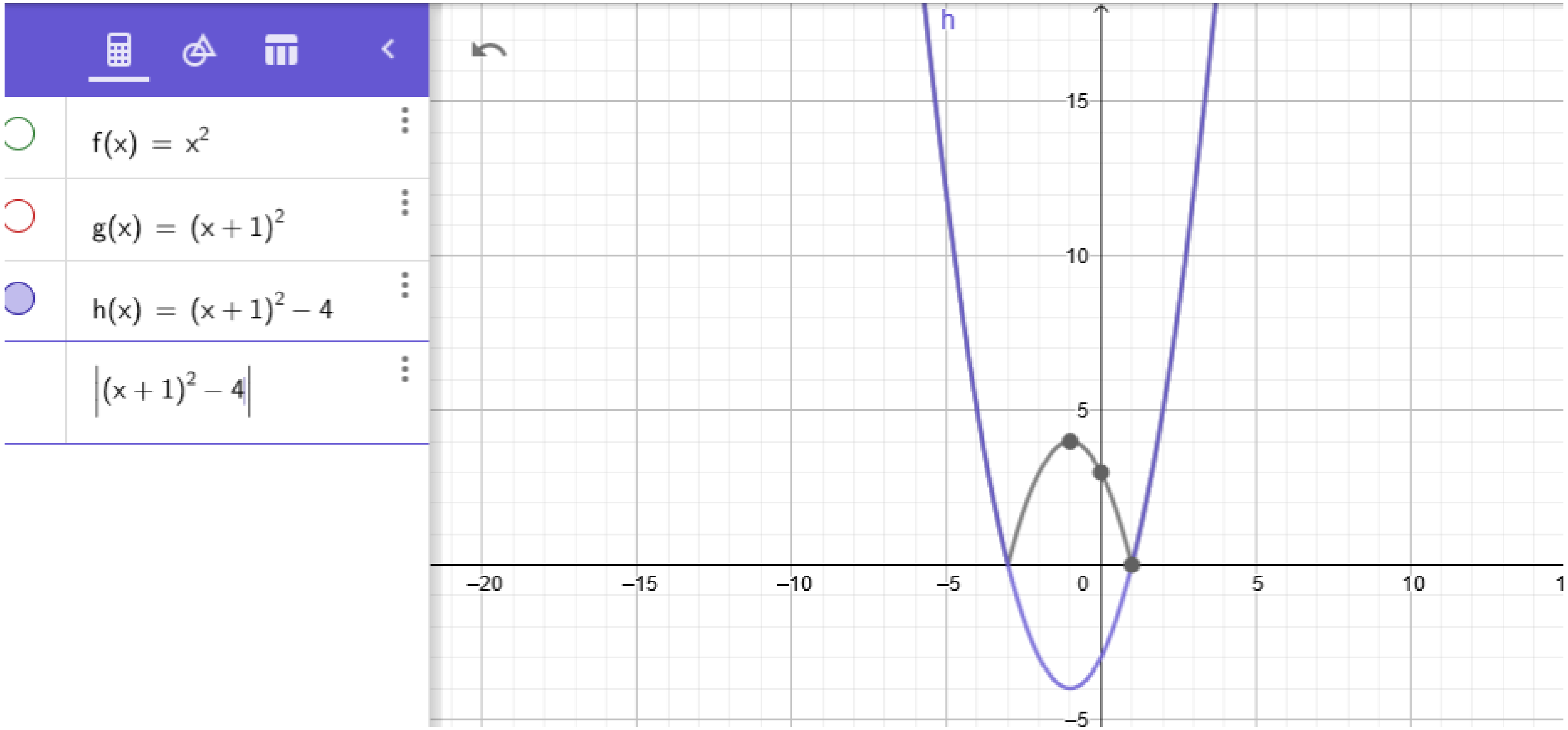
2. Часть графика, лежащую выше оси ОХ оставляем без изменения.

3. Часть графика, лежащую ниже оси ОХ отражаем симметрично относительно оси ОХ.

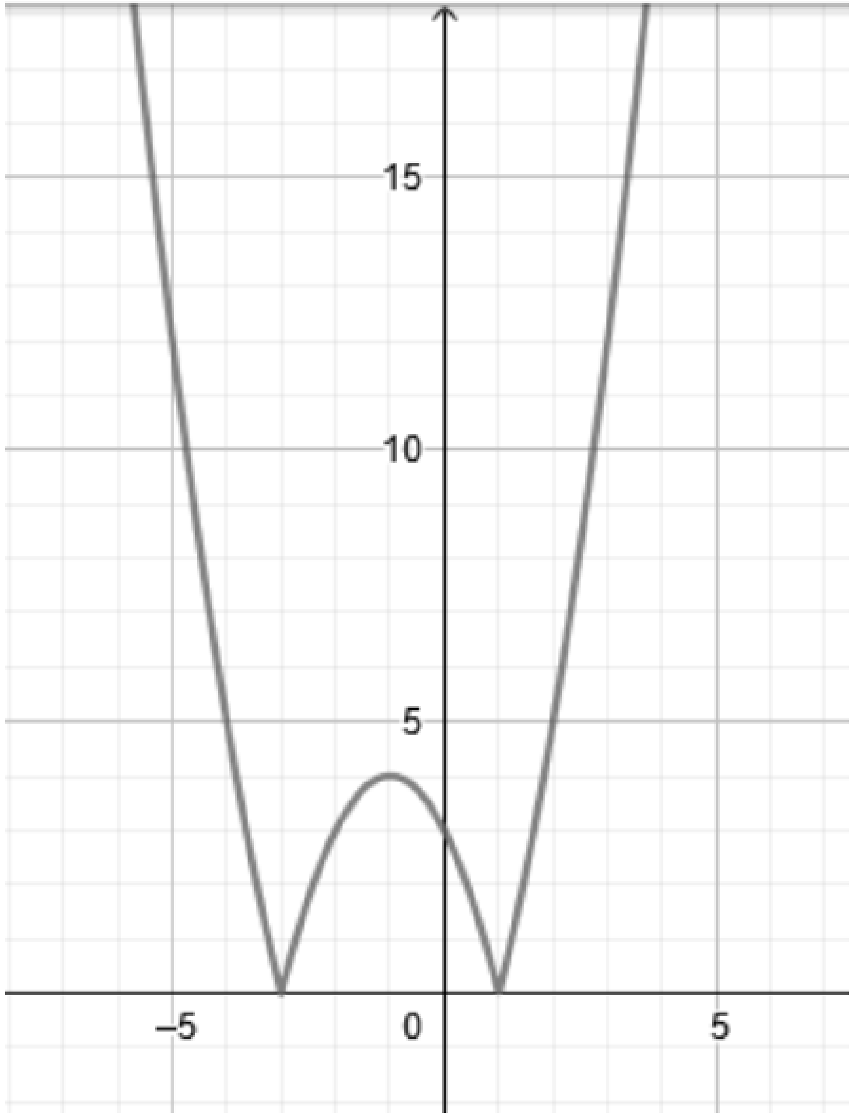
$$y = \left|(x+1)^2 - 4\right|$$



$$y=\left|(x+1)^2-4\right|$$



$$y = \left|(x+1)^2 - 4\right|$$

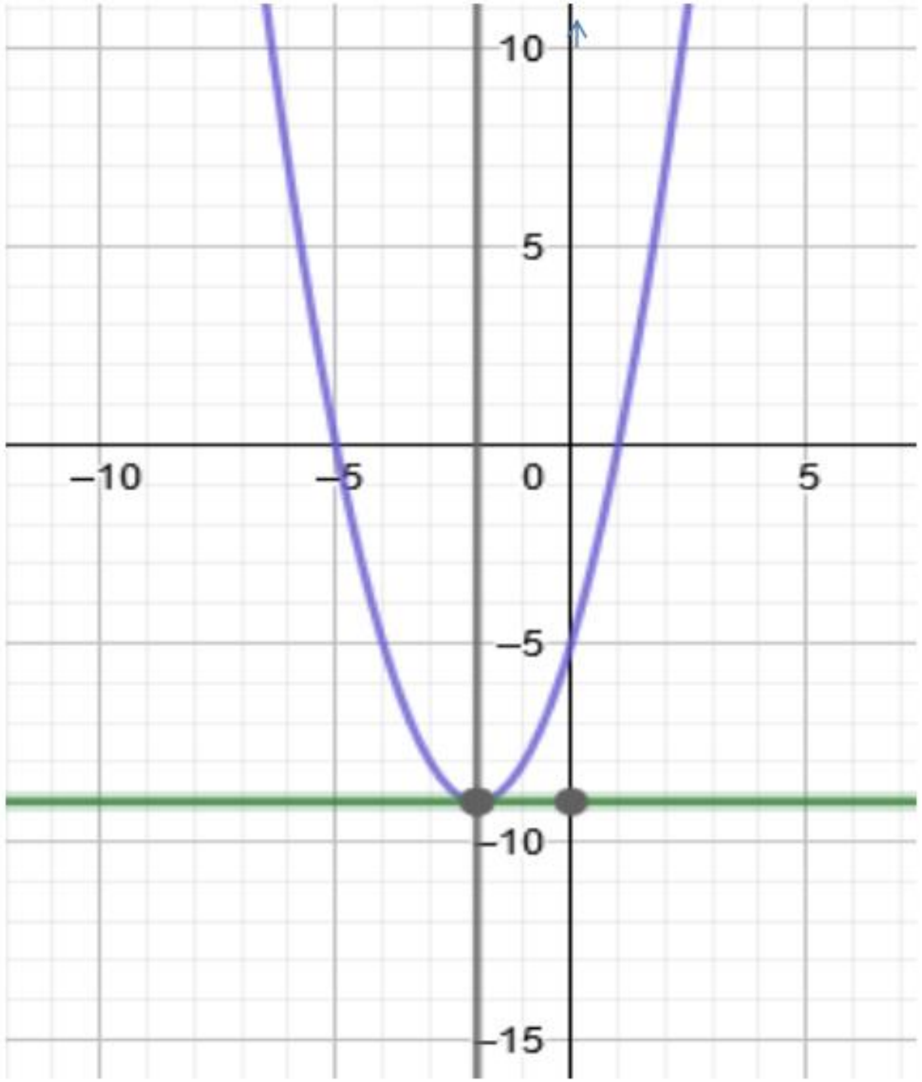


Постройте график функции $y = \left| x^2 + 4x - 5 \right|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс? (Сайт СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ)

1. Построим график функции $y = x^2$ в новой системе координат, где начало координат будет совпадать с координатами вершины параболы
2. Найдем координаты вершины параболы по формулам $x_в = \dfrac{-b}{2a}$ $y_в = y(x_в)$
3. Получим : (-2;-9)
4. Отметим точку (-2;-9) на координатной плоскости и проведем через нее вспомогательные прямые *x* = -2 *и y* =-9
5. Найдем некоторые точки графика функции

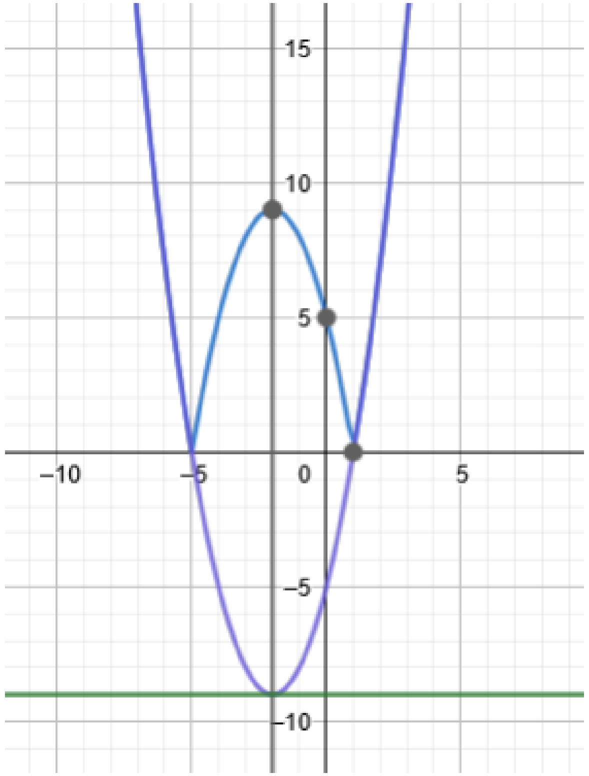
$$y = x^2 + 4x - 5$$

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9



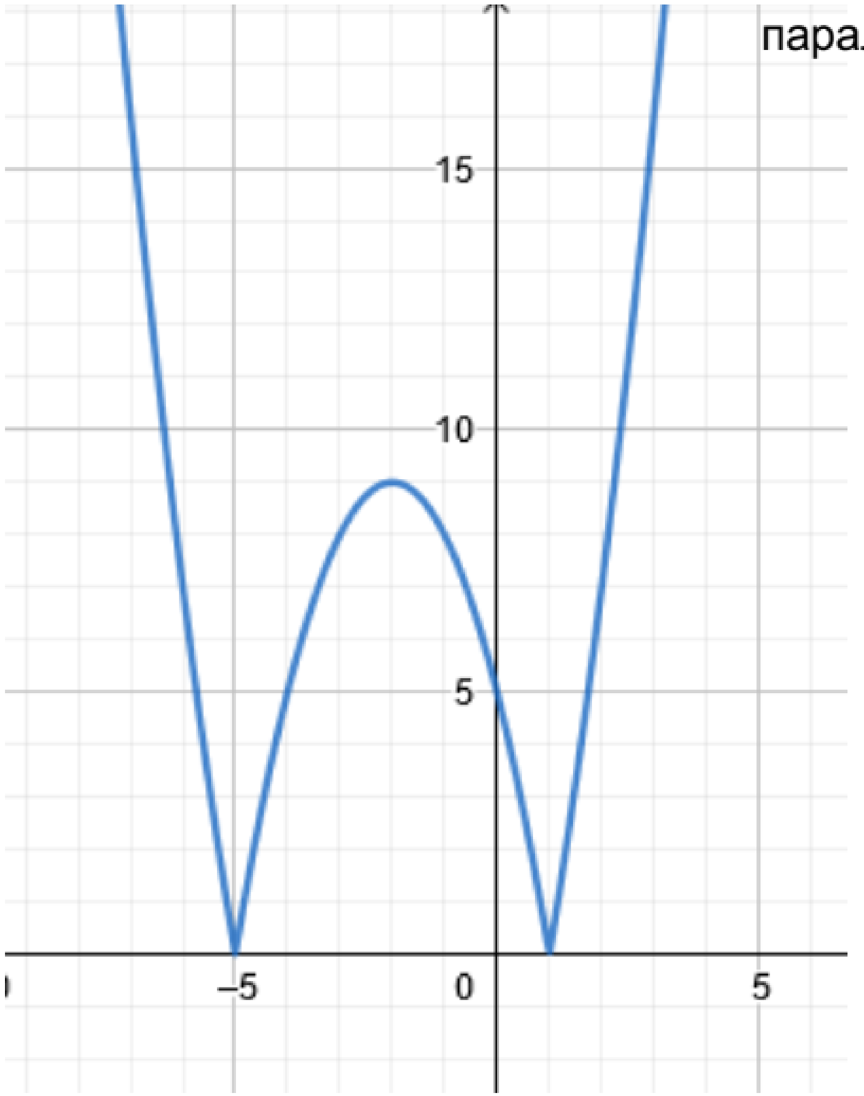
$$y = \left| x^2 + 4x - 5 \right|$$

1. Часть графика, лежащую выше оси ОХ оставляем без изменения.
2. Часть графика, лежащую ниже оси ОХ отражаем симметрично относительно оси ОХ.



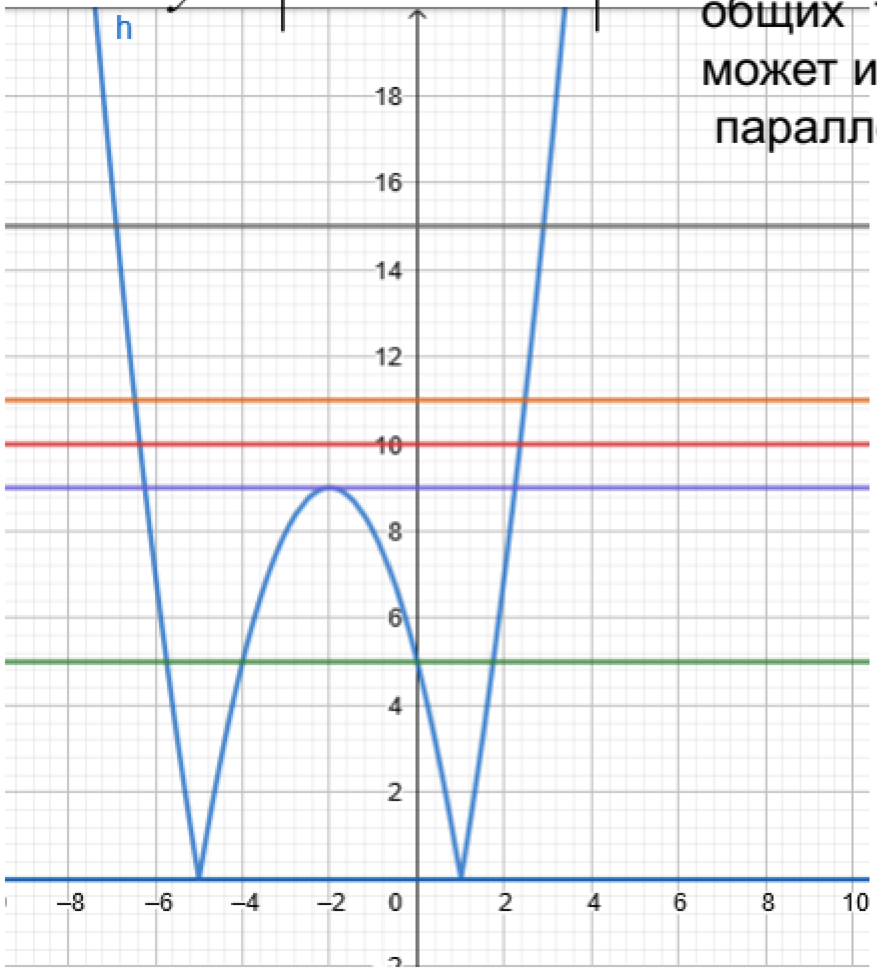
$$y = \left| x^2 + 4x - 5 \right|$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?



$$y = \left|x^2 + 4x - 5\right|$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?



$$y = (|x| - 2)^2$$

1.Строим график функции $y = (x-2)^2$

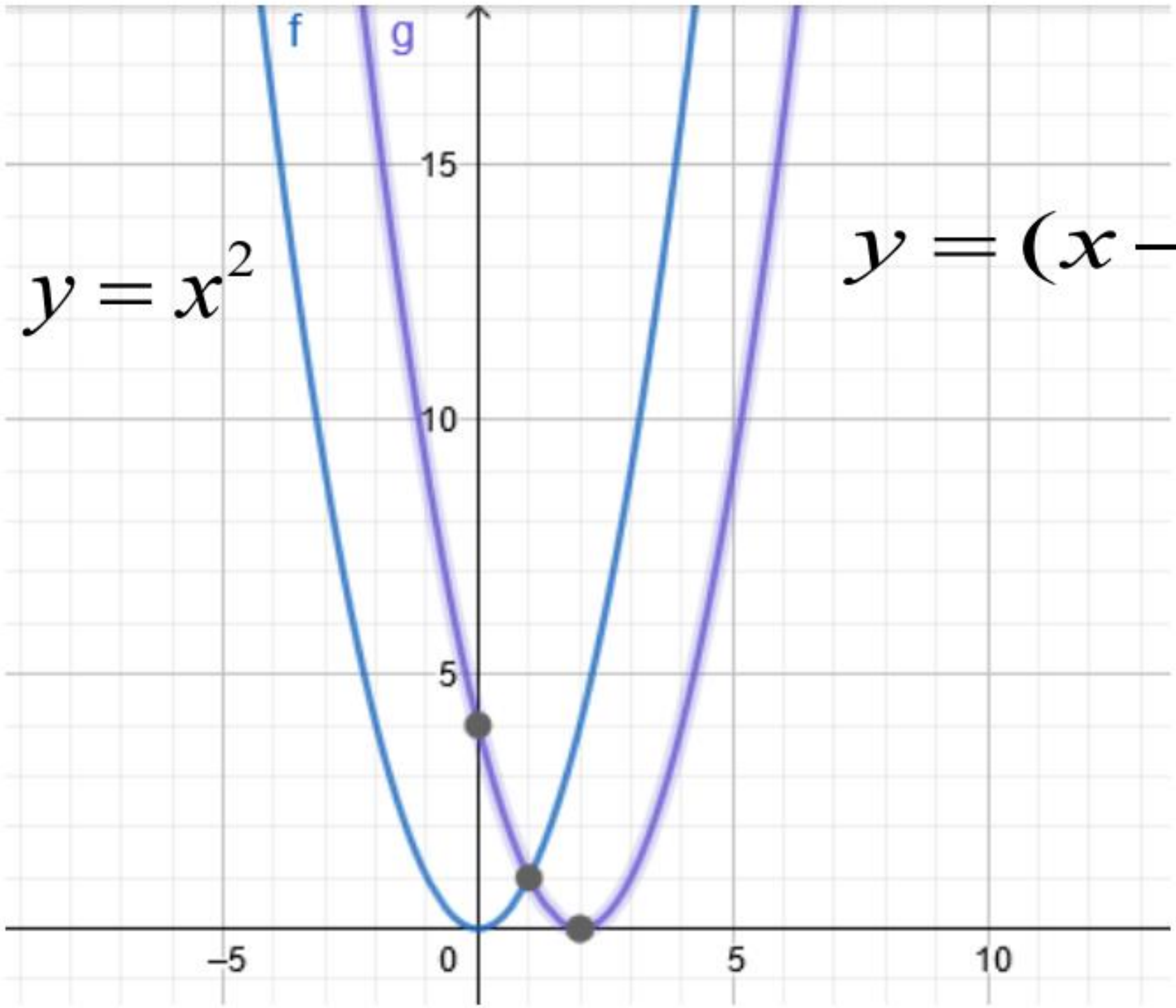
- Построим график функции $y = x^2$
- Сместим его на 2 масштабные единицы вправо по оси ОХ

2. Часть графика в левой полуплоскости отбрасываем

- Часть графика, лежащую в правой полуплоскости отражаем, симметрично относительно оси OY.

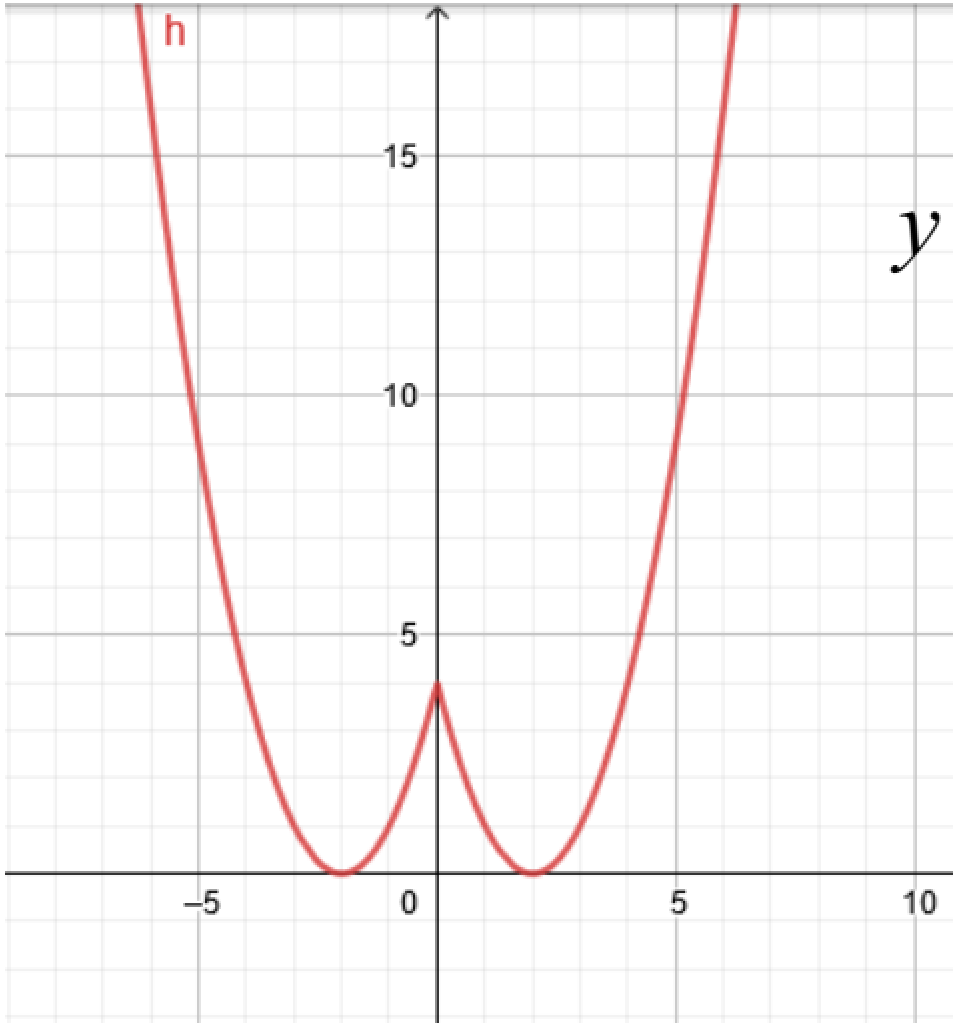
$$y = (|x| - 2)^2$$

$$y = x^2$$



$$y = (x - 2)^2$$

Часть графика в левой полуплоскости отбрасываем
Часть графика, лежащую в правой полуплоскости отражаем, симметрично относительно оси OY.



$$y = (|x| - 2)^2$$

Метод интервалов

Построить график функции $y=|x-1|+|x-3|$.

а) Из условий $|x-1|=0$ и $|x-3|=0$ находим абсциссы точек перелома графика: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

Следовательно, данную функцию следует рассматривать на трех промежутках: $(-\infty;1]$, $(1; 3]$ и и $[3;+\infty)$ и на них по частям строить график.

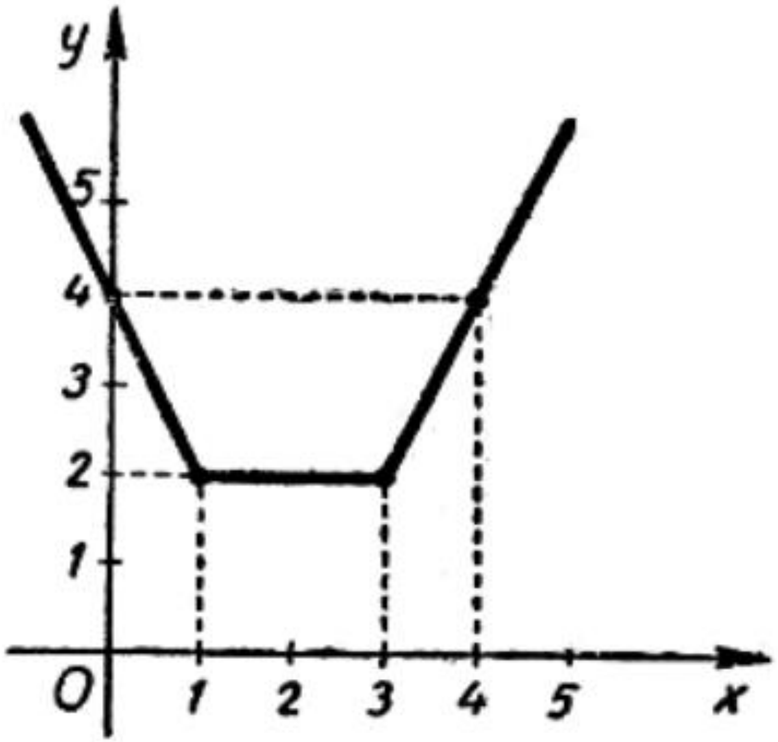
б) На $(-\infty;1]$ $y=1-x+3-x=4-2x$

На $(1; 3]$ $y=x-1+3-x=2$

На $[3;+\infty)$ $y=x-1+x-3=2x-4$

т.е.

$$y=\begin{cases}4-2x, x\le 1\\ 2;1<x\le 3\\ 2x-4, x>3\end{cases}$$


y
5
4
3
2
1
O
1
2
3
4
5
x

Метод линейного сплайна

График кусочно-линейной функции удобно строить, указывая на координатной плоскости вершины ломаной.

Кроме построения *n* вершин следует построить также две точки: одну левее вершины *A*1 (*x*1; *y* (*x*1)), другую – правее вершины *An* (*xn*; *y* (*xn*)).

Заметим, что разрывную кусочно-линейную функцию нельзя представить в виде линейной комбинации модулей двучленов.

Построить график функции **y = x+ |x -2| - |X|.**

Непрерывная кусочно-линейная функция называется линейным сплайном

1.Точки смены формул: X-2=0, X=2; X=0

2.Составим таблицу:

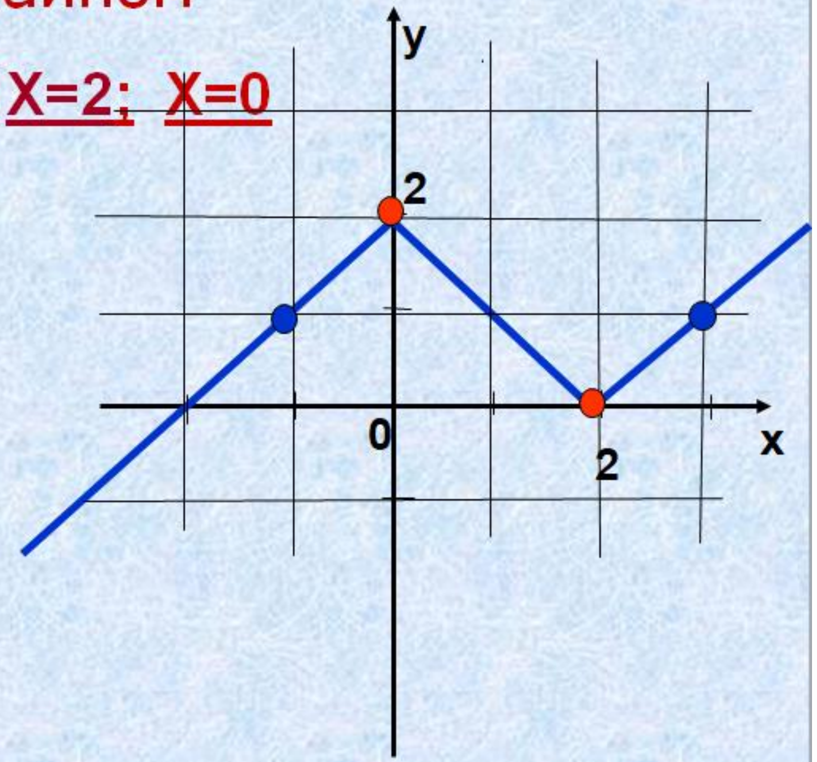
x	**-1**	**0**	**2**	**3**
y	**1**	**2**	**0**	**1**

У(**0**)= 0+|0-2|-|0|=0+2-0=**2**;

y(**2**)=2+|2-2|-|2|=2+0-2=**0**;

y(**-1**)= -1+|-1-2| - |-1|= -1+3-1=**1**;

y(**3**)=3+|3-2| - |3|=3+1-3=**1**.



Построить график функции $y = |x+1| + |x| - |x-2|$.

1. Точки смены формул:

$x+1=0$, $\underline{x=-1}$;

$\underline{x=0}$; $x-2=0$, $\underline{x=2.}$

2. Составим таблицу:

x	-2	-1	0	2	3
y	-1	-2	-1	5	6

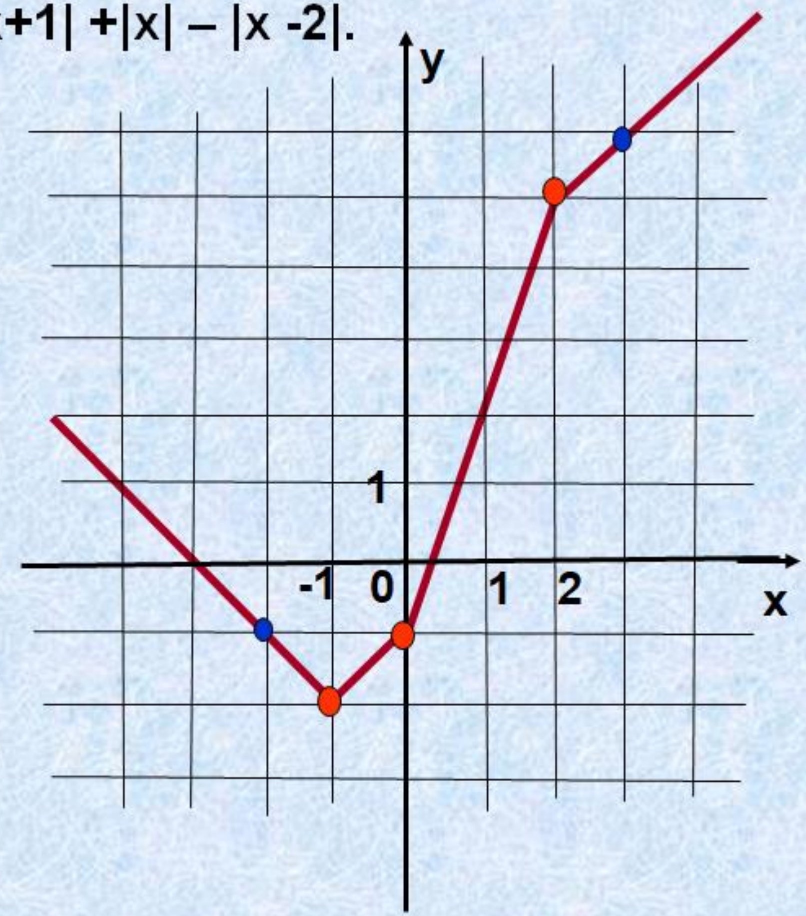
$y(-2)=|-2+1|+|-2|-|-2-2|=1+2-4=-1$;

$y(-1)=|-1+1|+|-1|-|-1-2|=0+1-3=-2$;

$y(0)=1+0-2=-1$;

$y(2)=|2+1|+|2|-|2-2|=3+2-0=5$;

$y(3)=|3+1|+|3|-|3-2|=4+3-1=6$.



Решите уравнение: $|x - 1| = |x + 3|$

Решение. Рассмотрим функцию $y = |x - 1| - |x + 3|$

Построим график функции /методом линейного сплайна/

1. Точки смены формул:

$x - 1 = 0,\ x = 1;\ x + 3 = 0,\ x = -3.$

2. Составим таблицу:

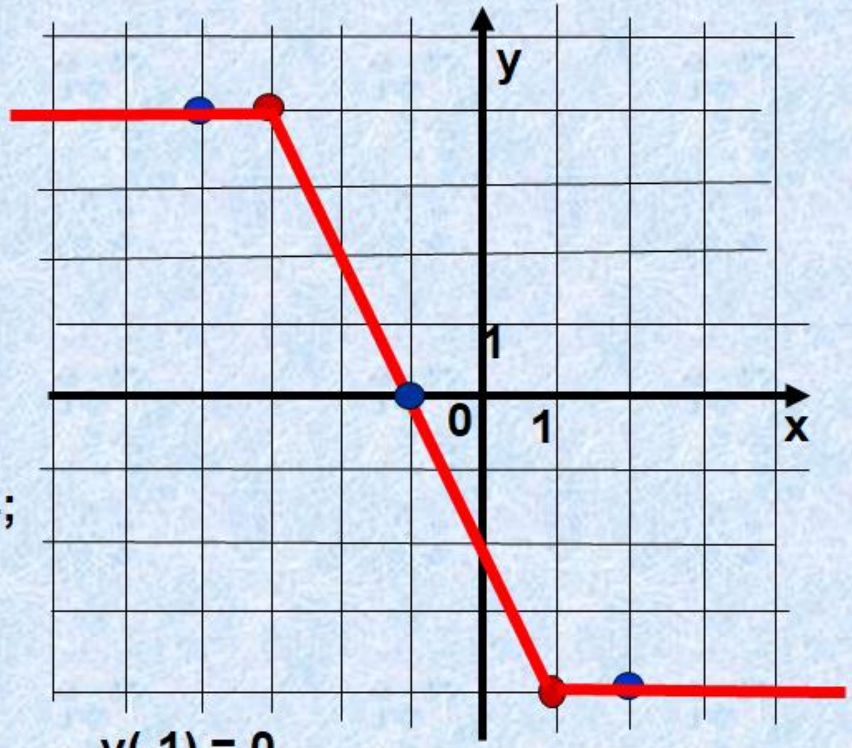
x	- 4	-3	1	2
y	4	4	- 4	- 4

$y(-4) = |-4-1| - |-4+3| = |-5| - |-1| = 5-1=4;$

$y(-3) = |-3-1| - |-3+3| = |-4| = 4;$

$y(1) = |1-1| - |1+3| = -4;$

$y(2) = |2-1| - |2+3| = 1 - 5 = -4.$



$y(-1) = 0.$

Ответ: -1.

<u>Задача</u> 4 . Постройте график функции $y = |x^2 - x - 2|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Построим параболу и отобразим относительно Ох ту часть графика, где функция принимает отрицательные значения

Найдем вершину параболы. Ее абсциссу можно вычислить по формуле:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

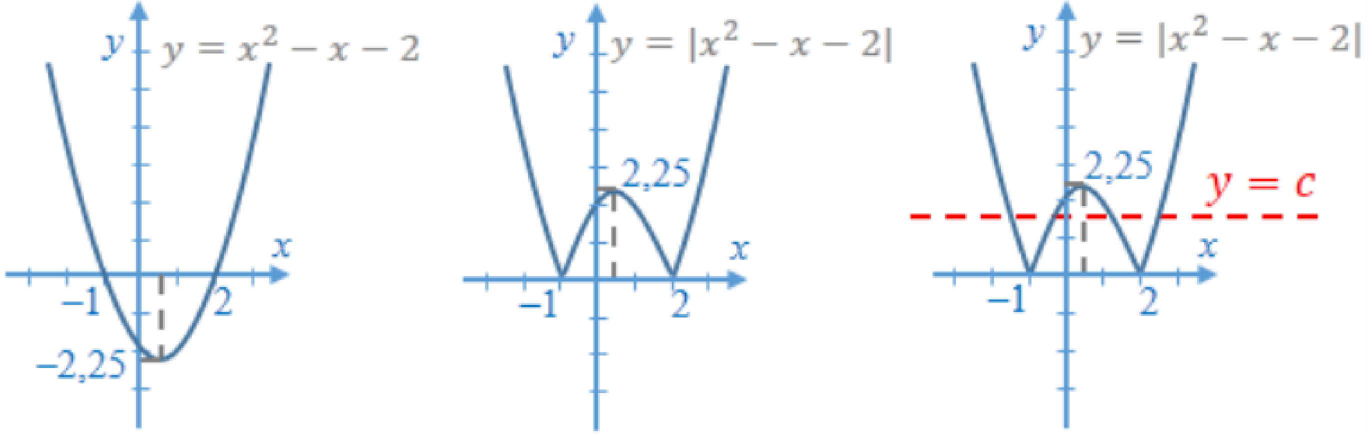
Коэффициенты нам известны (см.выше). Вычисляем абсциссу:

$$x_0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Подставим в уравнение функции полученное значение абсциссы и вычислим ординату вершины:

$$y_0 = 0{,}5^2 - 0{,}5 - 2 = 0{,}25 - 0{,}5 - 2 = -2{,}25.$$

Рис. а Рис. б Рис. в



Прямая $y = c$ параллельна оси x она может иметь с графиком функции не более 4 общих точек.

<u>Ответ</u>: 4.

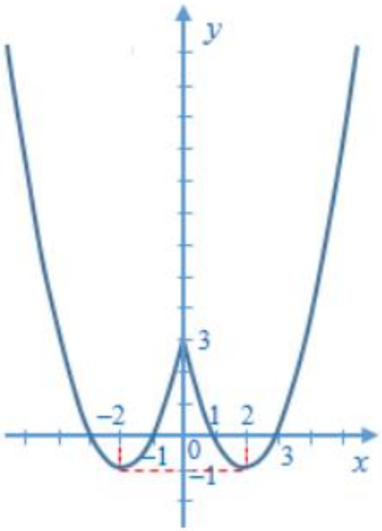
<u>Задача 8</u> . Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.

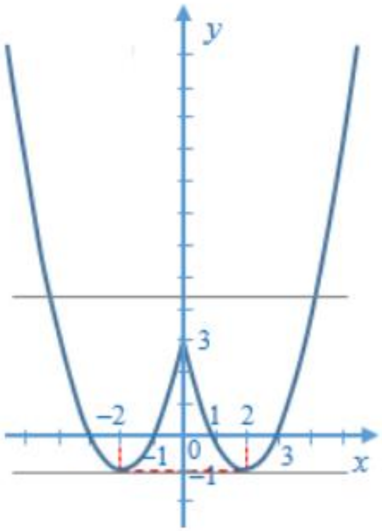
Данный график можно получить из графика функции $y = x^2 - 4x + 3.$

Путем симметричного отображения относительно Oy той части графика, где x неотрицательное число

Находим координаты вершины:

$$x_{в} = -\frac{-4}{2} = 2, \qquad y_{в} = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4} = -1.$$





прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки при $a = -1$ и $a \in (3; +\infty)$.

<u>Ответ</u>: -1; $(3; +\infty)$.

Задача 6. Постройте график функции $y = |x|x + |x| - 6x$ и определите, при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком ровно две общие точки.

Раскроем модули.

При x < 0:

$$y = -x \cdot x + (-x) - 6x = -x^2 - x - 6x = -x^2 - 7x.$$

При x ≥ 0:

$$y = x \cdot x + x - 6x = x^2 - 5x.$$

Наше функция обрела иной вид:

Находим корни (нули) функции.

Приравняем к нулю первое уравнение и решим его:

$$-x^2 - 7x = 0 \quad \leftrightarrow \quad -x(x+7) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} -x = 0 \\ x + 7 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -7 \end{cases}$$

Определим нули второго уравнения:

$$x^2 - 5x = 0 \quad \leftrightarrow \quad x(x-5) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Найдем вершину первой параболы. Для этого сначала отметим коэффициенты первого уравнения:

a = –1, b = –7, c = 0.

Находим абсциссу вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \cdot (-1)} = -\frac{7}{2} = -3{,}5.$$

Находим ординату вершины:

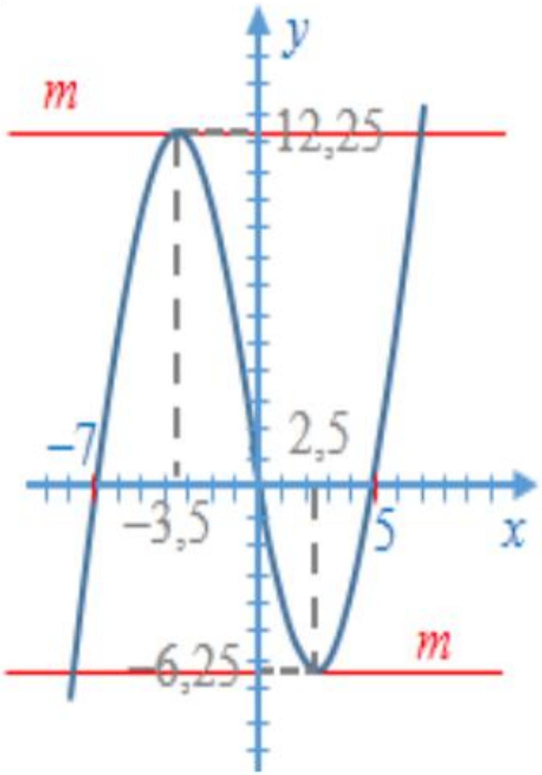
$$y_0 = -1 \cdot (-3{,}5)^2 - 7 \cdot (-3{,}5) = -1 \cdot 12{,}25 + 24{,}5 = 12{,}25.$$

Перейдем ко второй параболе. Отметим коэффициенты второго уравнения:

$a = 1$, $b = -5$, $c = 0$.

Найдем координаты вершины второй параболы:

$$x_0 = -\frac{-5}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} = 2{,}5, \qquad y_0 = 2{,}5^2 - 5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25 - 12{,}5 = -6{,}25.$$



прямая $y = m$ имеет ровно две общие точки с заданной функцией при $m = -6{,}25$ и $m = 12{,}25$.

Задача решена.

Ответ: = –6,25; 12,25.

<u>Задача</u> 5 . Постройте график функции $y = |x + 3| + |2x + 1| - x$.

Приравняем каждое подмодульное выражение к нулю и найдем точки, в которых происходит смена знака:

$x + 3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = -3.$

$2x + 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 2x = -1 \quad \leftrightarrow \quad x = -0{,}5.$

Отметим точки на числовой оси, определим интервалы знакопостоянства:

$x + 3$	–	+	+
$2x + 1$	–	–	+
	-3	$-0{,}5$	

Раскроем модули для каждого из трех интервалов.

В интервале $x \le -3$ оба подмодульных выражения со знаком минус. Пишем:

$$\begin{cases} x \le -3 \\ y = -(x + 3) - (2x + 1) - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \\ y = -4x - 4 \end{cases}$$

В промежутке $-3 \le x \le -0{,}5$ первое подмодульное выражение со знаком плюс, второе – со знаком минус. Учтем и это:

$$\begin{cases} -3 \le x \le -0{,}5 \\ y = (x + 3) - (2x + 1) - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le -0{,}5 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

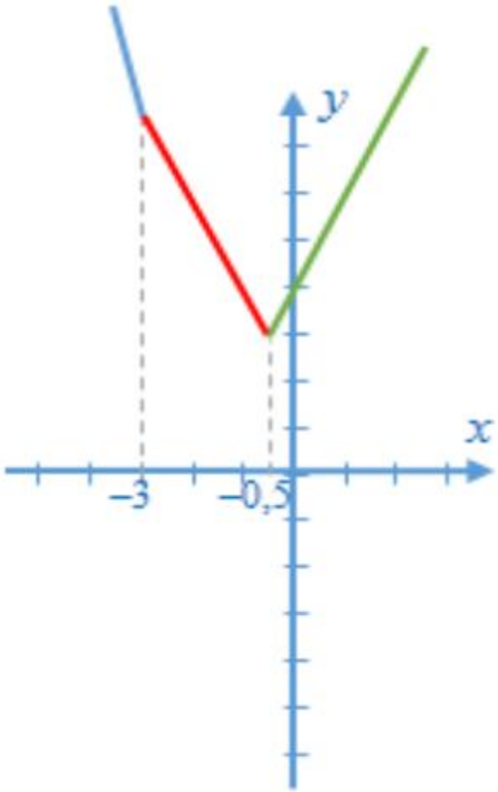
В промежутке $x \ge -0{,}5$ оба подмодульных выражения со знаком плюс:

$$\begin{cases} x \ge -0{,}5 \\ y = (x + 3) + (2x + 1) - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \ge -0{,}5 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

В результате наша функция обрела иной вид:

$$y = \begin{cases} -4x - 4, \text{если } x \le -3 \\ -2x + 2, \text{если } -3 \le x \le -0{,}5 \\ 2x + 4, \text{если} x \ge -0{,}5 \end{cases}$$

Все три подфункции – линейные, их графиками являются прямые.



Задача 9 . Постройте график функции:

$$y = \frac{1}{2}\left(\left|x - \frac{1}{x}\right| + x + \frac{1}{x}\right).$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Область определения функции: $x \neq 0$

Раскроем подмодульное выражение. Для этого приравняем его к нулю и решим:

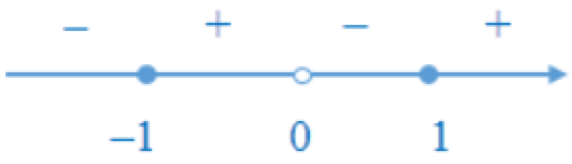
$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+1)}{x} = 0.$$

Дробь равна нулю только в том случае, если числитель равен нулю.

Приравняем числитель к нулю и решим уравнение:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Отметим полученные точки на числовой оси и определим знаки интервалов. При этом не забудем о точке 0. Хотя в этой точке функция не существует, она тоже образует интервал знакопостоянства:



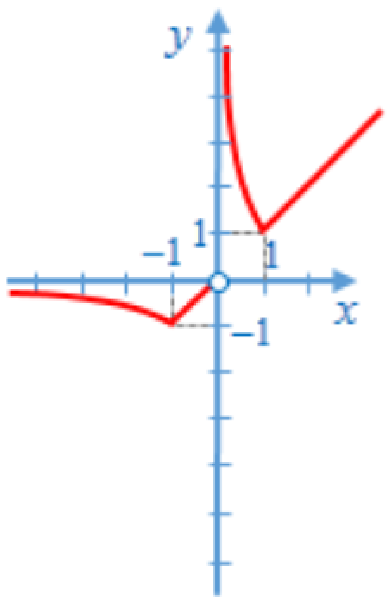
Таким образом, наша функция обрела новый вид:

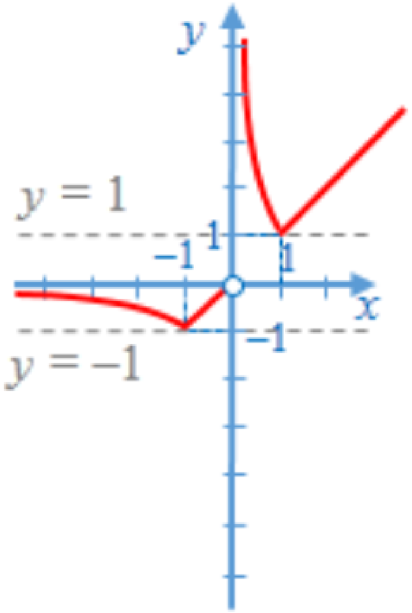
$$y = \begin{cases} x, \text{при } -1 \le x < 0 \text{ и } x \ge 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{при } x < -1 \text{ и } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Найдем несколько точек по каждой подфункции, чтобы нарисовать график:

1: (–0,8; –0,8), (–0,2; –0,2), (2; 2), (3; 3).

2: (–4; –0,25), (–3; $-\frac{1}{3}$), (–2; –0,5), (–1; –1), (0,2; 5), (0,5; 2), (0,8; 1,25), (1; 1).





Как видим, прямая $y = m$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции при $m = -1$ и $m = 1$.

Ответ: –1; 1.

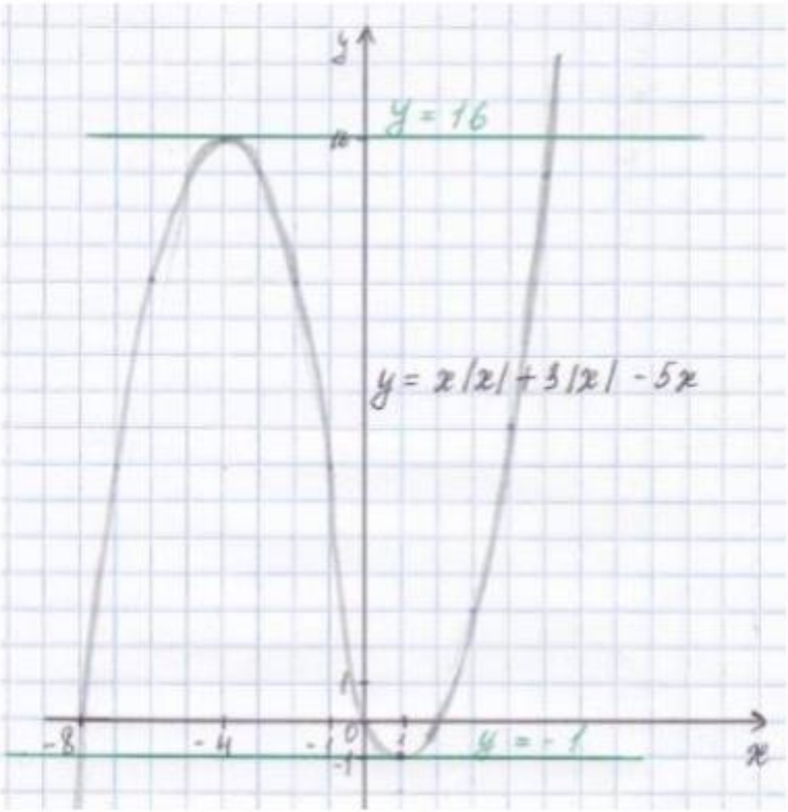
Задания для самостоятельного решения

1. Постройте график функции $y = x|x| + 3|x| - 5x$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

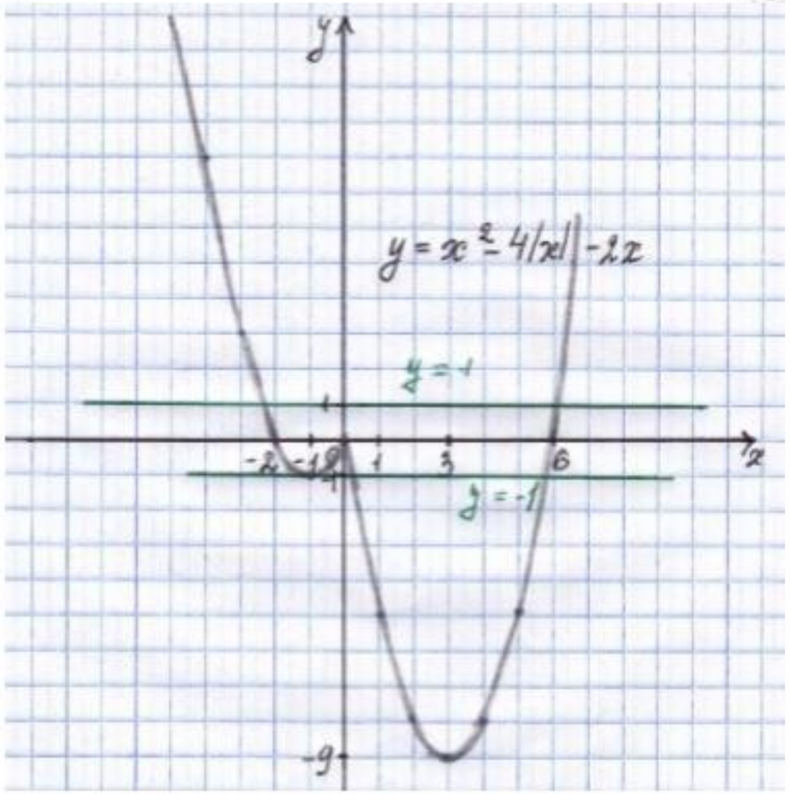
2. Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| - 2x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком не менее одной, но не более трех общих точек.

3. Постройте график функции $y = \frac{(0{,}75x^2+2{,}25x)|x|}{x+3}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$не имеет с графиком ни одной общей точки.

1.



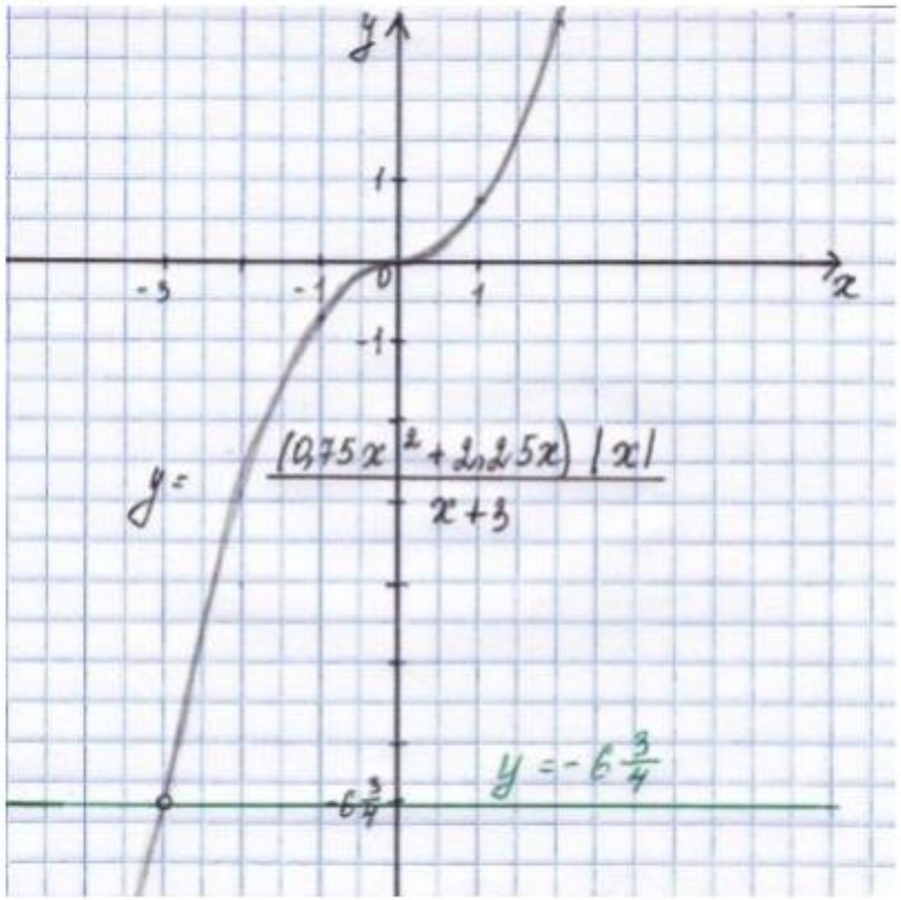
2.



Ответ: m = - 1; m = 16.

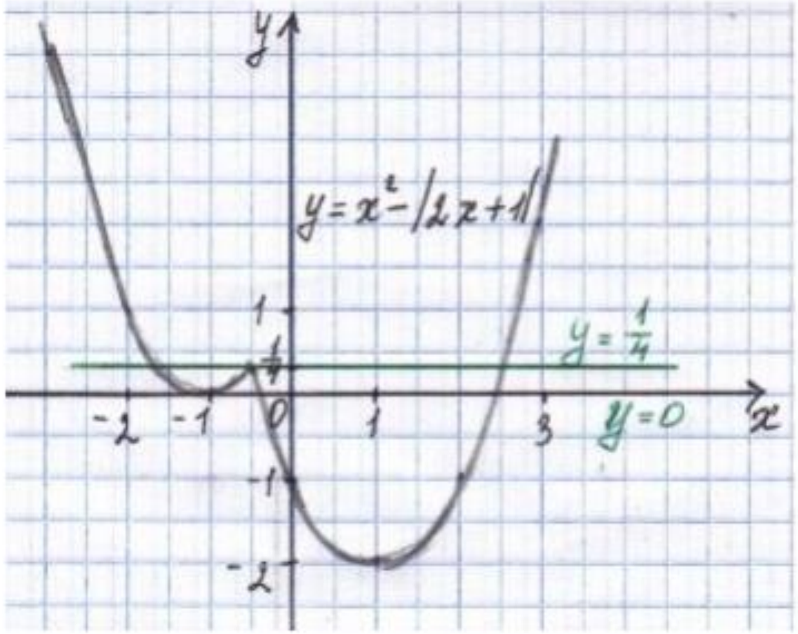
Ответ: $m \in [-9; -1] \cup [0; +\infty)$.

3.



Ответ: - 6,75.

4.



Ответ: 0; 0,25.

https://3.shkolkovo.online/catalog/2559

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!