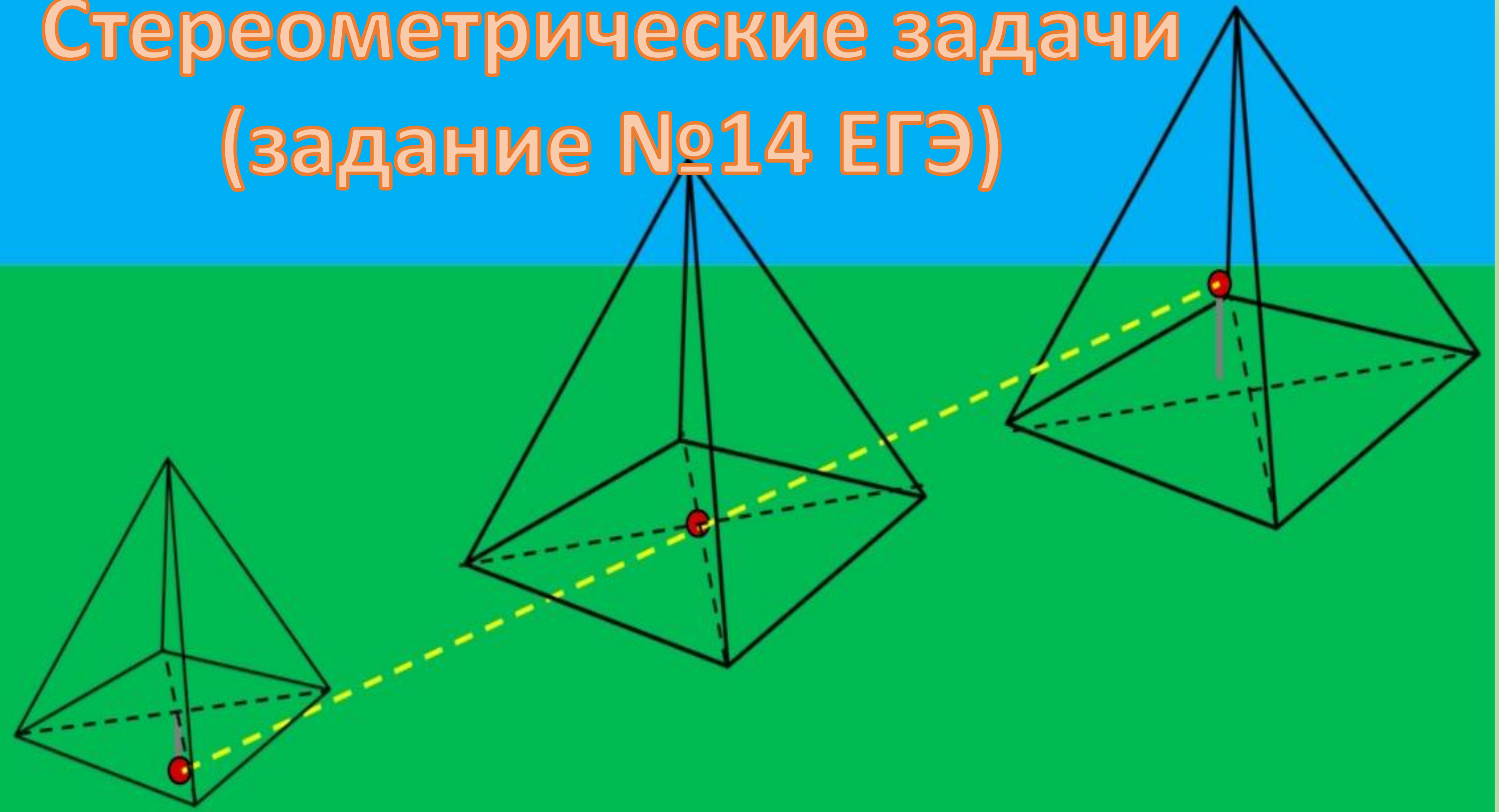
Стереометрические задачи (задание №14 ЕГЭ)



Учитель математики
МБОУ СОШ №3
им. А. Верещагиной
г. Туапсе
Чалова Наталья Геннадьевна

Что надо знать о задании №14 ЕГЭ:

Задание ЕГЭ №14 – это задание с развёрнутым ответом повышенного уровня сложности.

При выполнении заданий №14 в бланке ответов №2 должны быть записаны
полное обоснованное решение и ответ.

Решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены.

Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.

За решение,
в котором обосновано получен правильный ответ,
выставляется максимальное количество баллов - 2 балла.

Правильный ответ при отсутствии текста решения
оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание
представленного решения,
а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Проверяемые требования к заданию №14:

Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение:

- ✓длин
- ✓углов
- ✓площадей
- ✓объёмов

Использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы

Определять координаты точки

Проводить операции над векторами

Вычислять длину и координаты вектора

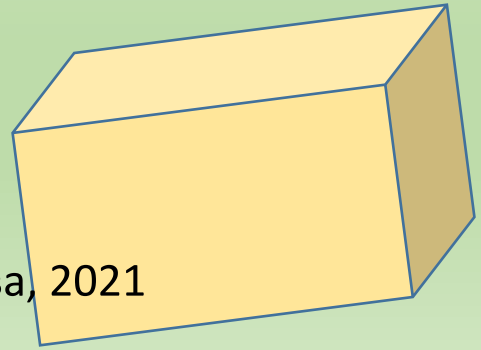
Вычислять угол между векторами

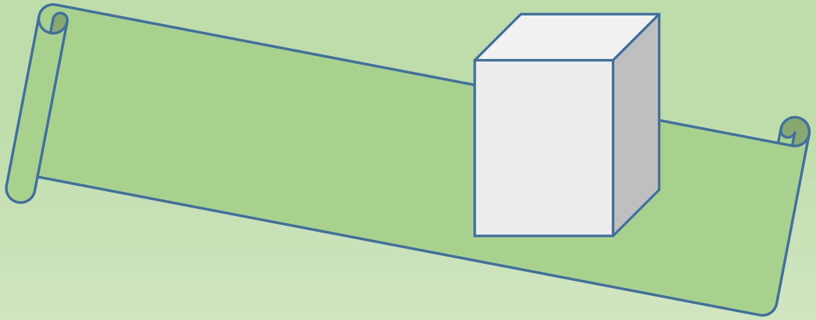
Элементы содержания экзаменационной работы:

Прямые и плоскости в пространстве

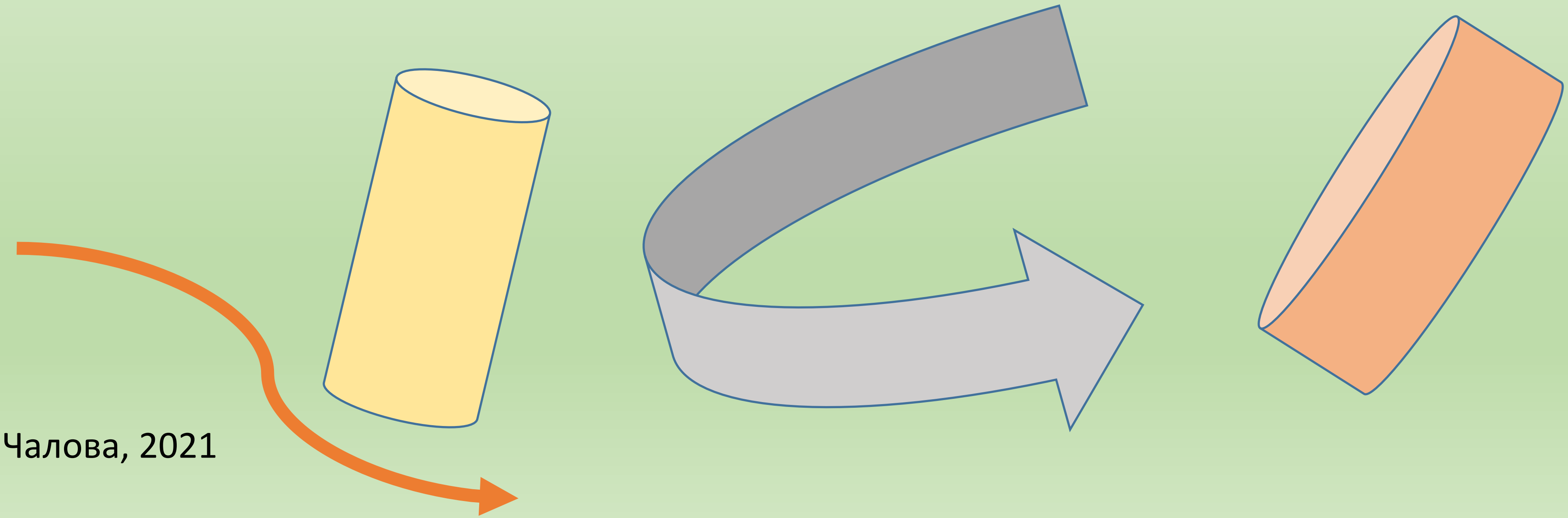
Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых
Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства
Параллельность плоскостей, признаки и свойства
Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах
Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства
Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур

Многогранники
Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма
Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде
Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида
Сечения куба, призмы, пирамиды
Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)



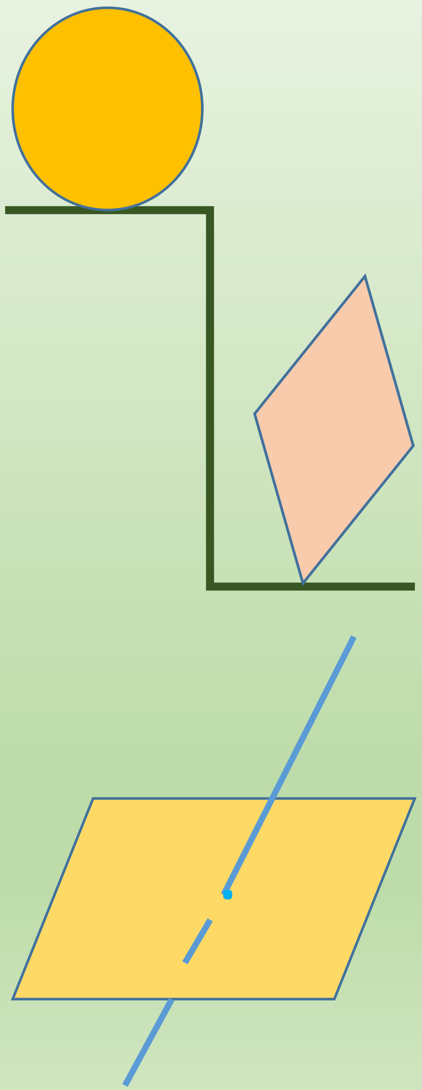


Тела и поверхности вращения
Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка
Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка
Шар и сфера, их сечения



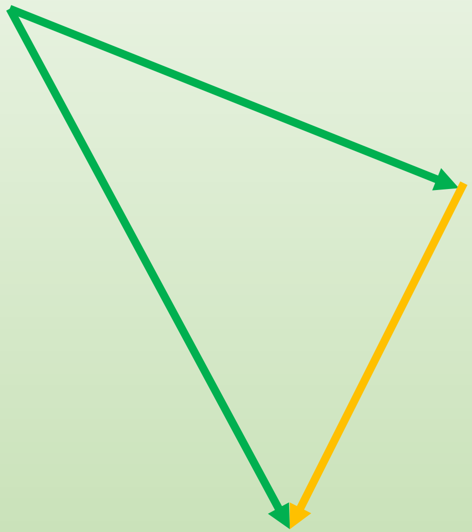
Измерение геометрических величин

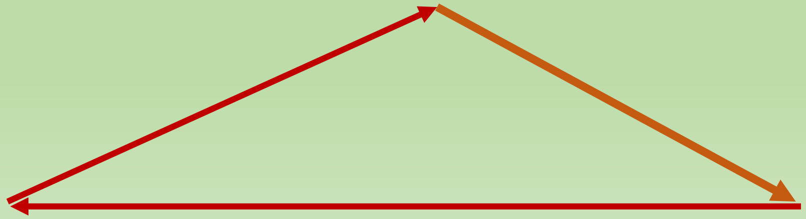
Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности
Угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями
Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника
Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми; расстояние между параллельными плоскостями
Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора
Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы
Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара



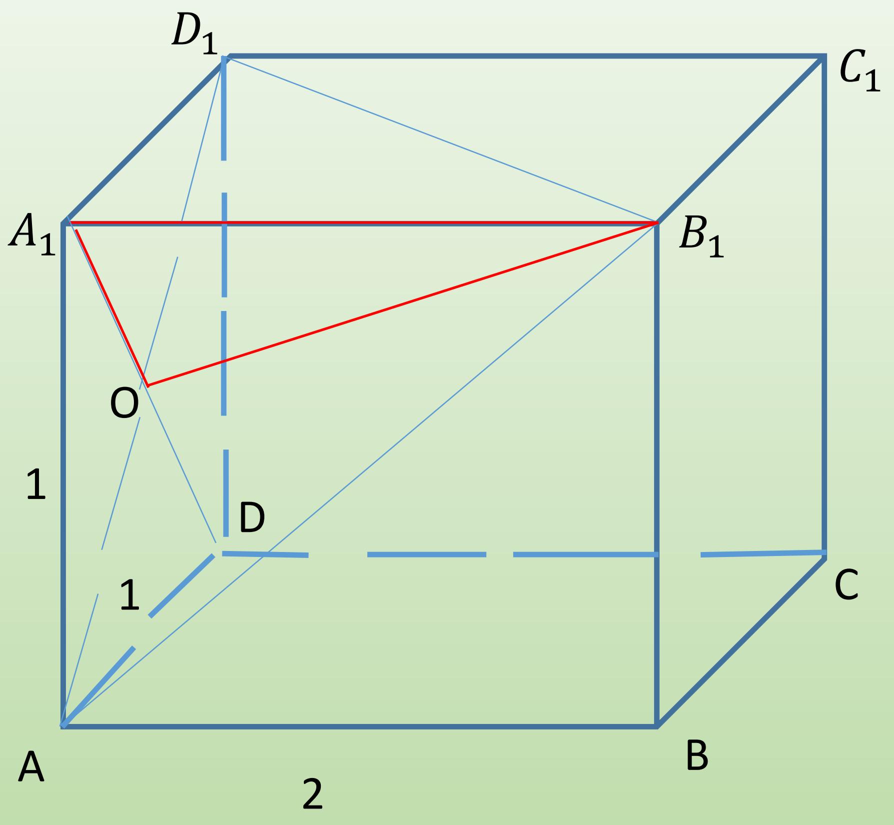
Координаты и векторы

Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве
Формула расстояния между двумя точками, уравнение сферы
Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на число
Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам
Компланарные векторы. Разложение по трём некомпланарным векторам
Координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами





№1 В прямоугольном параллелепипеде ABCD$A_1B_1C_1D_1$ AB=2, AD=AA_1=1. Найдите угол между прямой A_1B_1 и плоскостью AB_1D_1.



Дано:
ABCD$A_1B_1C_1D_1$- прямоугольный параллелепипед,
AB=2, AD=AA_1=1
Найти:
Угол между A_1B_1 и (AB_1D_1)

Решение:

AA_1D_1D – квадрат, значит, его диагонали перпендикулярны.
Следовательно, A_1 O ⊥ на(AB_1D_1).
OB_1 - проекция A_1B_1 на (AB_1D_1). Тогда угол между прямой A_1B_1 и плоскостью AB_1D_1 - это $\angle A_1B_1$O.

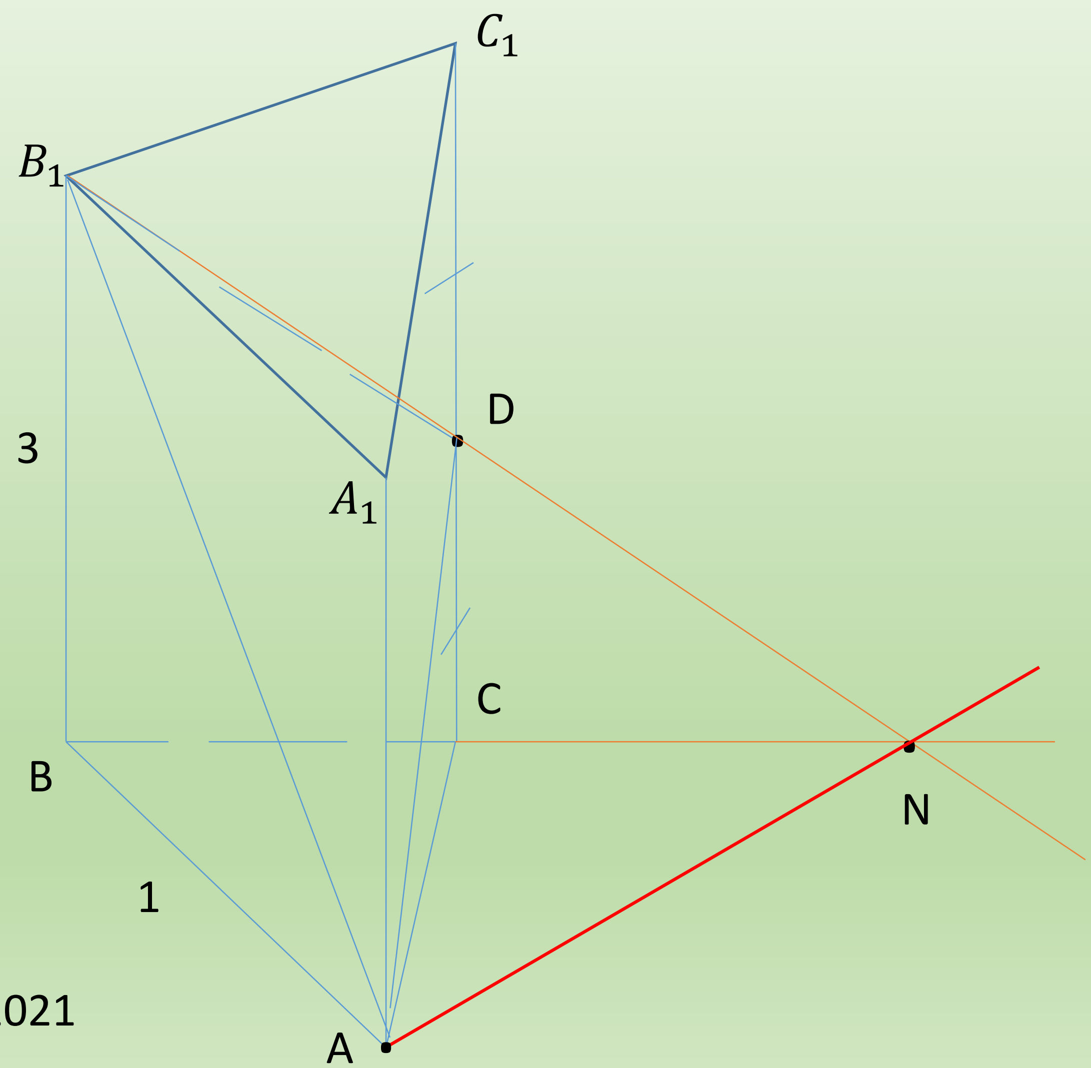
Из ΔA_1OB_1 $(\angle O = 90°)$ A_1O – половина диагонали. ⇒
$A_1O=\frac{\sqrt{A_1A^2+AD^2}}{2}=\frac{\sqrt{1+1}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\sin\angle A_1B_1O=\frac{A_1O}{A_1B_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}:2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle A_1B_1O=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$

№2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 3, точка D – середина ребра CC_1.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ - правильная треугольная призма,

AB=1, BB_1=3, (·) D - середина CC_1.

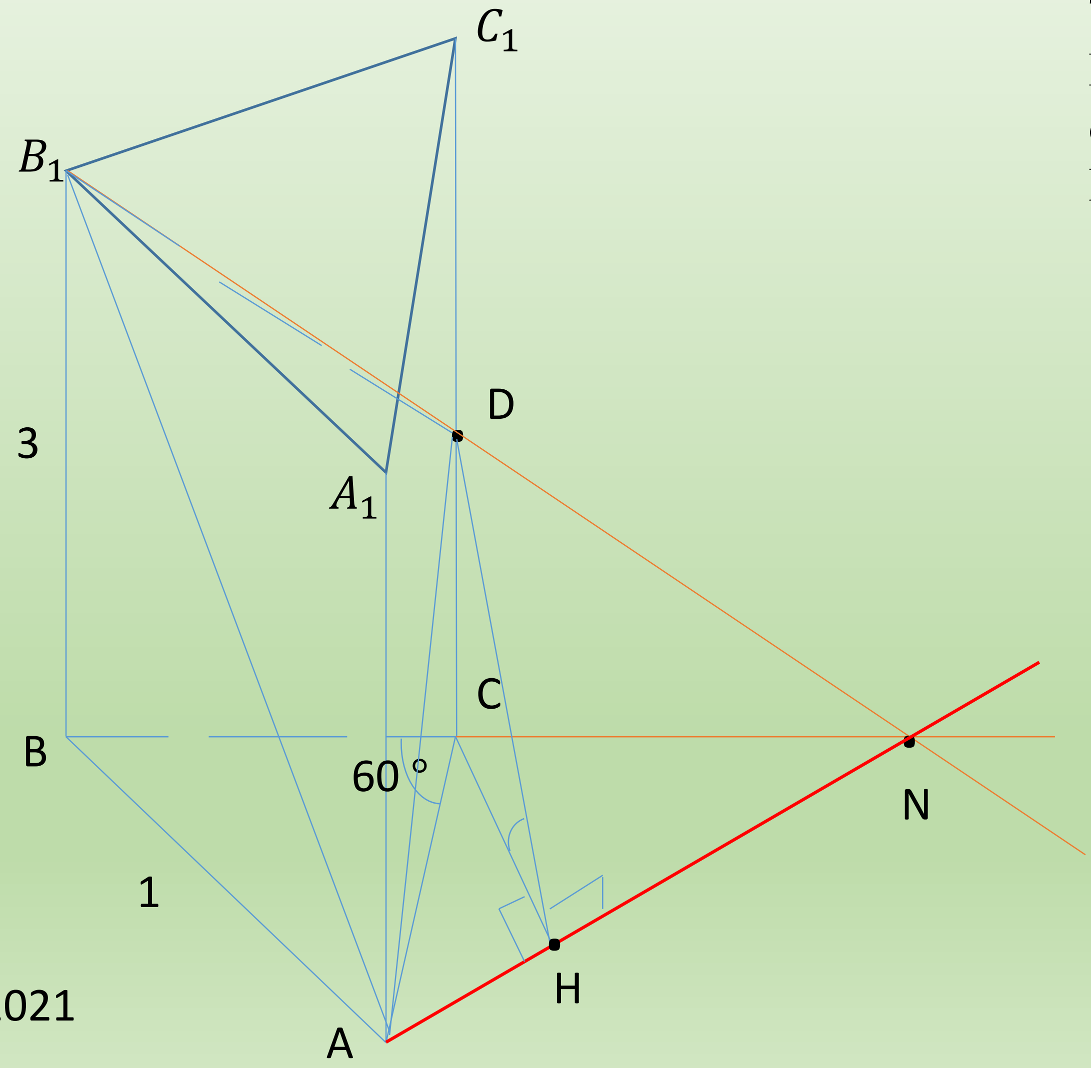
Решение:

а) Построим прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1. Так как прямая B_1D и прямая BC лежат в одной плоскости BCC_1, то они пересекаются в точке N. Точка N лежит в плоскостях ABC и ADB_1. Точки N и A лежат в плоскостях ABC и ADB_1, следовательно, плоскости ABC и ADB_1 пересекаются по прямой AN. Искомая прямая пересечения плоскостей ABC и BDB_1 построена.

№2

В правильной треугольной призме ABC $A_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 3, точка D – середина ребра СC_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADD_1.



Решение:

б) Угол между плоскостями – это линейный угол, значит, необходимо к линии пересечения плоскостей ABC и ADB_1 - прямой AN восстановить перпендикуляры.

Т.к. призма правильная, то ребро СC_1 ⊥ (ABC).

В Δ ACN проведём высоту CH. Проведём DH – она является наклонной к (ABC).

По т. о трёх перпендикулярах DH ⊥ AN. ⇒

∠CHD- угол между плоскостями ABC и ADB_1.

ΔBB_1N подобен ΔDCN (II признак подобия) с коэффициентом подобия 2, т.к. точка D – середина ребра СC_1 по условию, тогда точка C – середина BN. Значит, DC=3:2=1,5, CN=1⇒ Δ ACN равнобедренный. Тогда CH – биссектриса и медиана.

∠ACN=180 °- ∠ACB=180 °- 60°=120°.

∠ACH= 120°: 2 = 60° ⇒ ∠CAH=90 °- 60 ° = 30°.

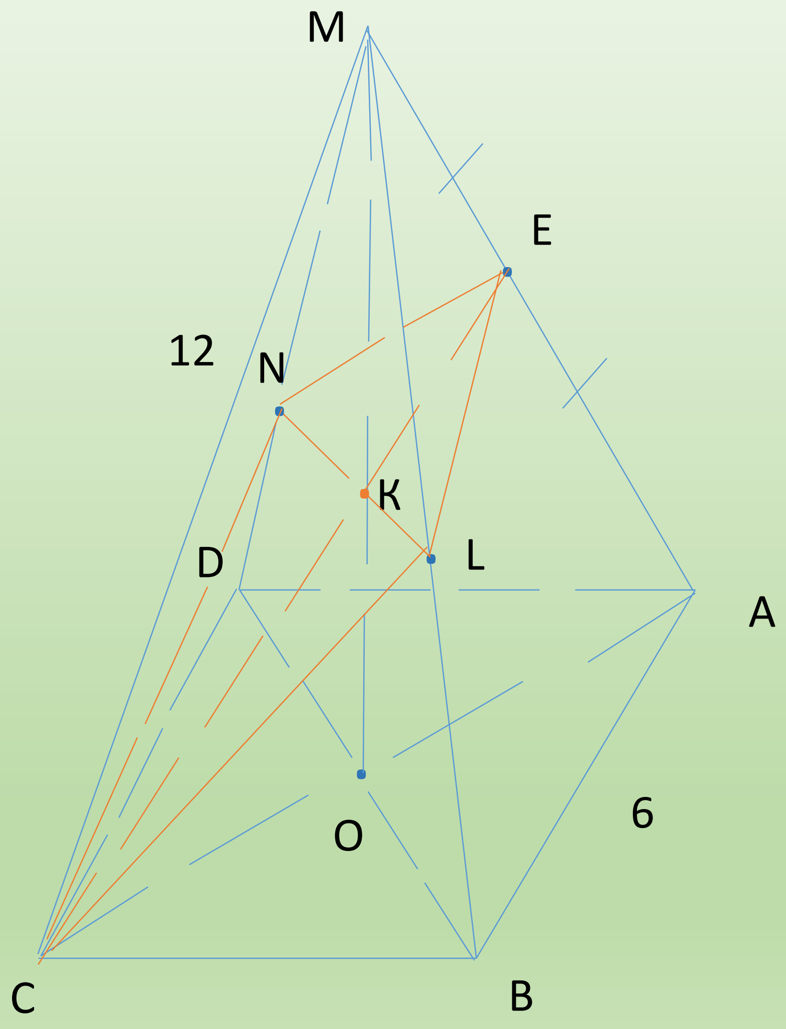
По свойству прямоугольного треугольника CH=1:2=0,5.

В прямоугольном Δ DCH tg ∠CHD=$\frac{CD}{CH} = \frac{1,5}{0,5}$ =3 ⇒

∠CHD=arctg3.

Ответ: ∠CHD=arctg3.

№3 В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.



Решение:

По признаку параллельности прямой и плоскости в плоскости сечения найдётся прямая, которая параллельна BD.

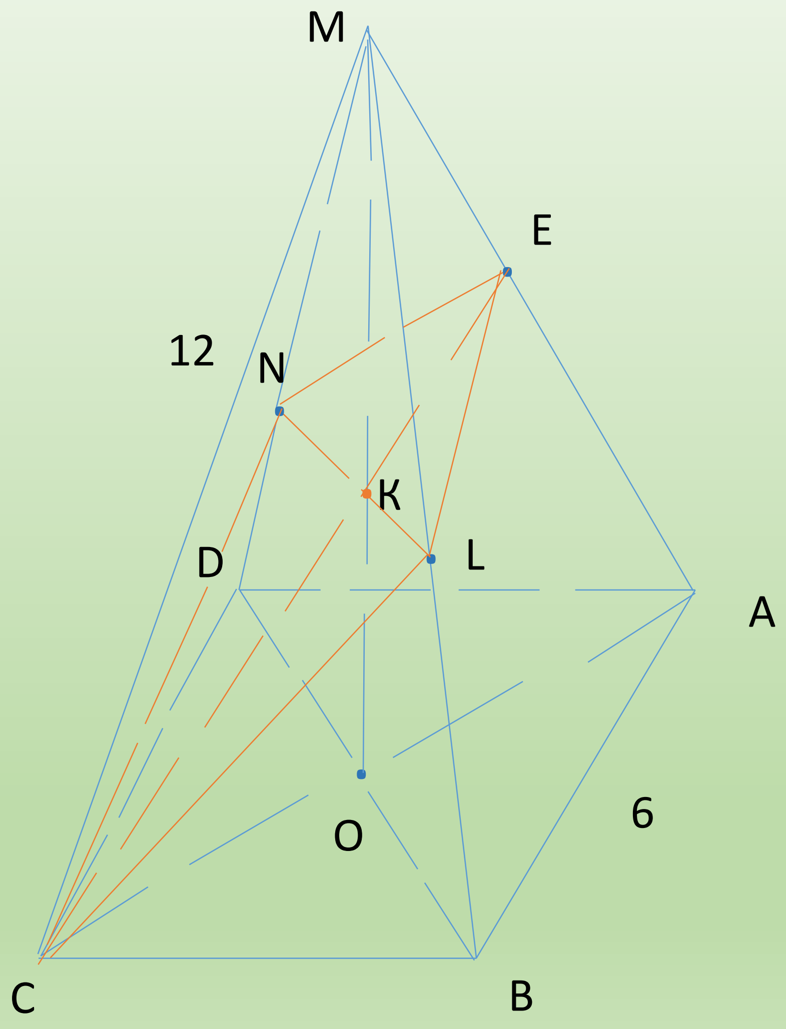
Т.к. пирамида правильная, то основание высоты является центром основания пирамиды – точкой пересечения диагоналей квадрата.

В ΔMCA высота пирамиды является медианой. В этом же треугольнике CE также является медианой. Медианы пересекаются в точке K.

Через точку K проведём прямую, параллельную BD. Она пересечёт ребро MD точке N, а ребро MB – в точке L.

Через пересекающиеся прямые NL и CE по аксиоме проходит плоскость. Это и есть плоскость сечения, параллельная BD, содержащая прямую NL.

№3 В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.



Решение:

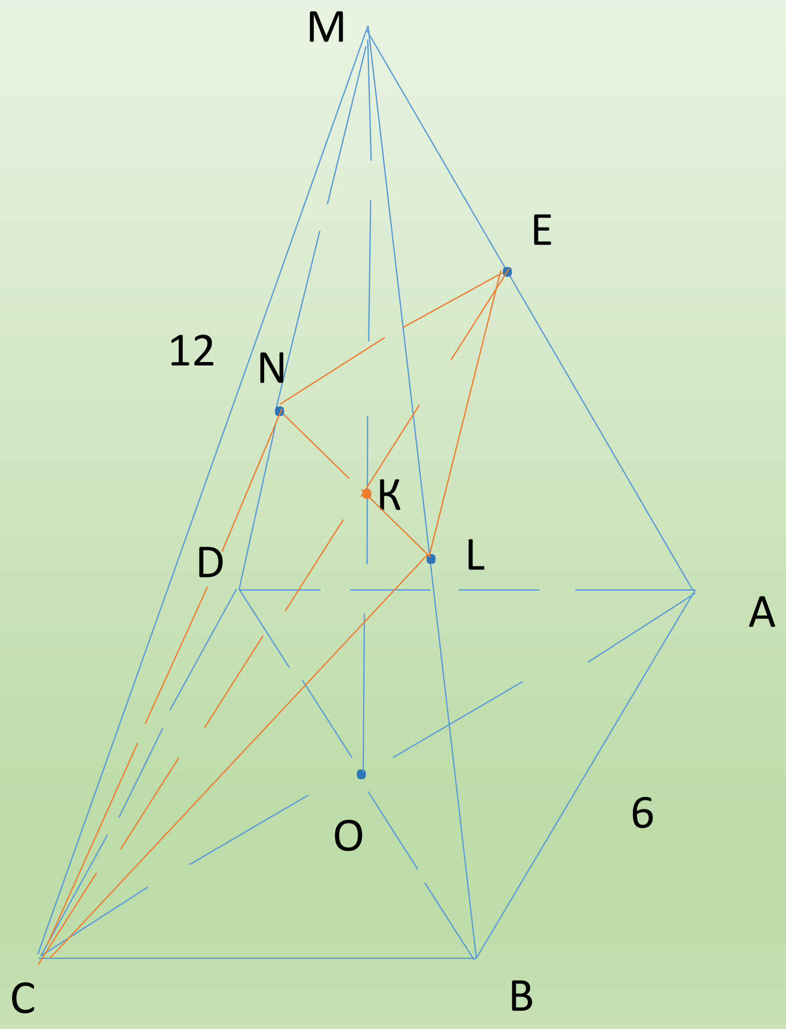
NL || DB , по признаку ⊥ -ти прямой и плоскости DB ⊥ (CMA), т.к. DB ⊥ CA как диагонали квадрата, DB ⊥ MO. ⇒
NL ⊥ (CMA). Тогда по определению ⊥ -ти прямой и плоскости NL ⊥ CE, где CE принадлежит плоскости (CMA) и плоскости сечения (CNE).

Тогда в ΔCN L и ΔNEL CK и EK являются высотами соответственно.

Площадь сечения – четырёхугольника CNEL равна сумме площадей ΔCNL и ΔNEL.

$$S_{CNEL}=S_{CNL}+S_{ELN}=\frac{1}{2}CK\cdot LN+\frac{1}{2}EK\cdot LN=$$
$$=\frac{1}{2}\text{NL}\cdot(CK+EK)=\frac{1}{2}\text{LN}\cdot\text{CE}.$$

№3



$S_{CNEL} = \frac{1}{2}$ LN·CE.

Найду диагональ основания:

DB=$\sqrt{CD^2 + CB^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ =CA.

Треугольники MDB и MLN подобны по второму признаку подобия треугольников с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$, т.к. медианы CE и MO пересекаются в отношении 2:1 от вершины. ⇒

NL=$\frac{2}{3}$ DB = $\frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

В Δ CMA по т. о медиане вычислим медиану CE:

$CE^2 = \frac{CM^2}{2} + \frac{CA^2}{2} - \frac{MA^2}{4}$

$CE^2 = \frac{12^2}{2} + \frac{(6\sqrt{2})^2}{2} - \frac{12^2}{4} = 72$

CE = $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$S_{CNEL} = \frac{1}{2}$ LN·CE = $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 24$

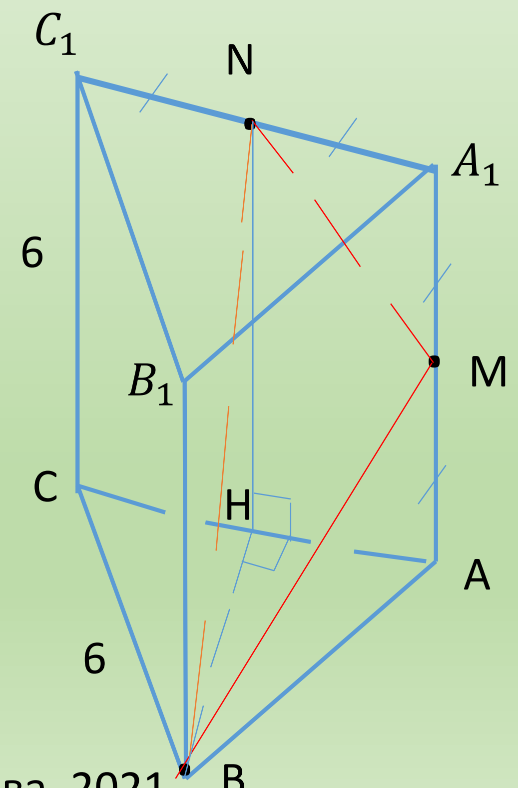
Ответ: 24

№4

Демонстрационный вариант ЕГЭ профильного уровня 2020 года

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.
а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Решение:



а) Через три точки можно провести плоскость (BNM).
Найдем стороны Δ BNM и воспользуемся т., обратной т. Пифагора.
Пирамида правильная, значит боковые грани – прямоугольники. ⇒
В прямоугольном Δ MAB (∠A=90 °) $BM^2 = MA^2 + BA_2 = 3^2 + 6^2 = 45$
В прямоугольном Δ NA_1M ($\angle A_1$=90 °) $MN^2 = A_1N^2 + A_1M^2 = 3^2 + 3^2 = 18$.
В Δ ABC опустим высоту BH. Т.к. Δ ABC правильный, то BH – медиана ⇒ точка H – середина CA. $HB^2 = BA^2 - HA^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ вычисляем из прямоугольного ΔAHB. Т.к. H – середина CA, тогда NH || боковым рёбрам пирамиды, значит, NH ⊥ (ABC) ⇒ NH ⊥ HB . Значит, в прямоугольном Δ NHB $BN^2 = HN^2 + HB^2 = 6^2 + 27 = 36 + 27 = 63$.

45+18=63. Тогда $MN^2 + BM^2 = BN^2$. Следовательно, по т., обратной т. Пифагора ΔNMB - прямоугольный с прямым углом M ⇒ MN ⊥ MB.

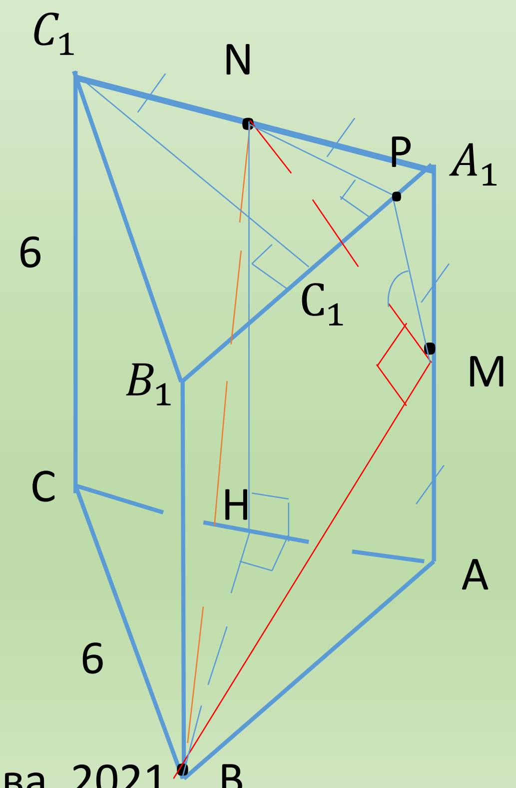
№4 Демонстрационный вариант ЕГЭ профильного уровня 2020 года

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Решение:



Угол между плоскостями определяется линейным углом. Для его определения необходимо к ребру двугранного угла в одну точку восстановить перпендикуляры в каждой плоскости.

BM – прямая, по которой пересекаются (BMN) и (ABB_1).

В (BMN) $MN \perp MB$ по доказанному в пункте (а).

MN- наклонная к (ABB_1). Опустим $\perp$ из точки N на (ABB_1). Основание $\perp$ - точка P, которая лежит на B_1A_1. Тогда PM – проекция наклонной NM на (ABB_1).

По т. о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Значит, $\angle NMP$ – угол между плоскостями (BNM) и (ABB_1) .

В $\Delta A_1B_1C_1$ высота CC_1 будет равна высоте $BH=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, т.к. призма правильная. Параллельный ей отрезок $NP=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, т.к. N – середина A_1C_1.

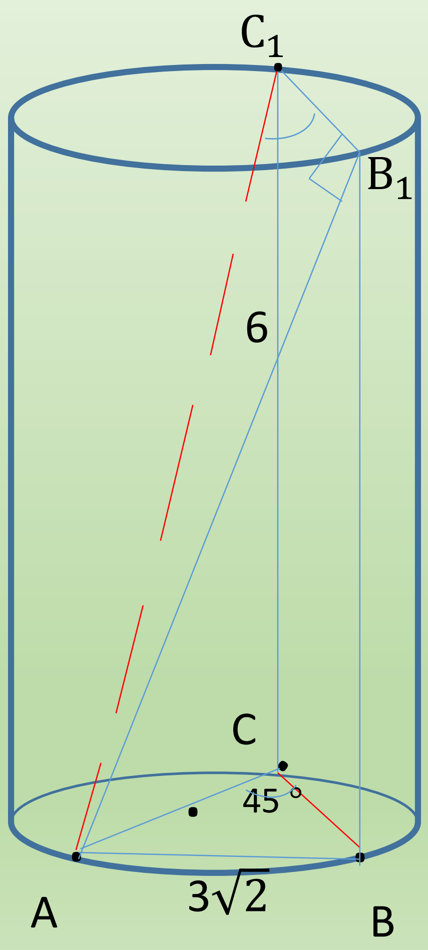
$\sin\angle NMP=\frac{NP}{NM}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{18}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. Тогда $\angle NMP=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$

Ответ: $\angle NMP=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$

№4 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B, и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 - образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что ∠ACB - 45 °, $AB = 3\sqrt{2}$, $CC_1 = 6$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60 °.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.



Решение:

а) Плоскость, содержащая CB и CC_1 параллельна оси цилиндра, ⇒ ⊥ плоскости основания и является прямоугольником, значит, BB_1 - образующая.

Прямые AC_1 и BC – скрещивающиеся. Через AC_1 проведу плоскость, параллельную CB. В (AC_1 B_1) находится прямая $C_1B_1 \| CB$. ⇒ По определению угол между скрещивающимися прямыми AC_1 и BC – это $\angle AC_1B_1$.

Из прямоугольного треугольника ABB_1 с прямым углом B

$AB_1 = \sqrt{AB^2 + B_1B^2} = \sqrt{18 + 36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

AB_1 является наклонной к плоскости BCC_1, а BB_1 - её проекция на эту плоскость. Т.к. $C_1B_1 \perp BB_1$, то по т. о трёх перпендикулярах $C_1B_1 \perp AB_1$

Значит, треугольник AC_1B_1 прямоугольный с прямым углом B_1.

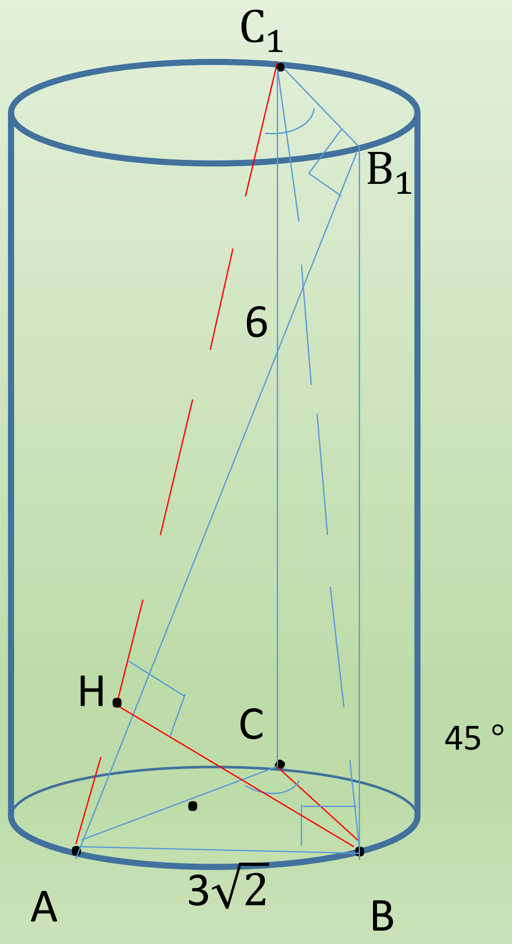
Т.к. AC – диаметр, то ∠ABC = 90 °, ∠ACB - 45 °, значит, Δ ABC – прямоугольный и равнобедренный ⇒ $AB=BC=3\sqrt{2}$. $CB = C_1B_1 = 3\sqrt{2}$ как стороны прямоугольника.

Тогда $\operatorname{tg} \angle AC_1B_1 = \frac{AB_1}{C_1B_1} = \frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle AC_1B_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60$ °.

№4 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B, и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 - образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB$ - 45 °, $AB = 3\sqrt{2}$, $CC_1 = 6$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60 °.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.



Решение:

б) Т.к. BB_1 - образующая, то $AB \perp BB_1$. $\angle ABC$ – вписанный, опирающийся на половину дуги, то он – прямой, ⇒ $AB \perp CB$. Тогда по признаку ⊥-ти прямой и плоскости $AB \perp (BCC_1)$. ⇒ $AB \perp BC_1$.

Тогда расстоянием от точки B до прямой AC_1 будет высота прямоугольного треугольника ABC_1, опущенная из вершины B.

$AB_1 = BC_1 = 3\sqrt{6}$ из равенства прямоугольных треугольников ABB_1 и BCC_1 по двум катетам ($AB=BC$, $BB_1=CC_1$).

Найду гипотенузу прямоугольного треугольника ABC_1:

$AC_1 = \sqrt{AB^2 + C_1B^2} = \sqrt{18 + 54} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2} BH \cdot AC_1 \Rightarrow 9\sqrt{3} = \frac{1}{2} BH \cdot 6\sqrt{2} \Rightarrow BH = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Ответ: а) 60 °, б) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

Критерии оценивания:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*	2
Выполнен только один из пунктов – *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

Удачи на экзаменах!!!

Спасибо за внимание!