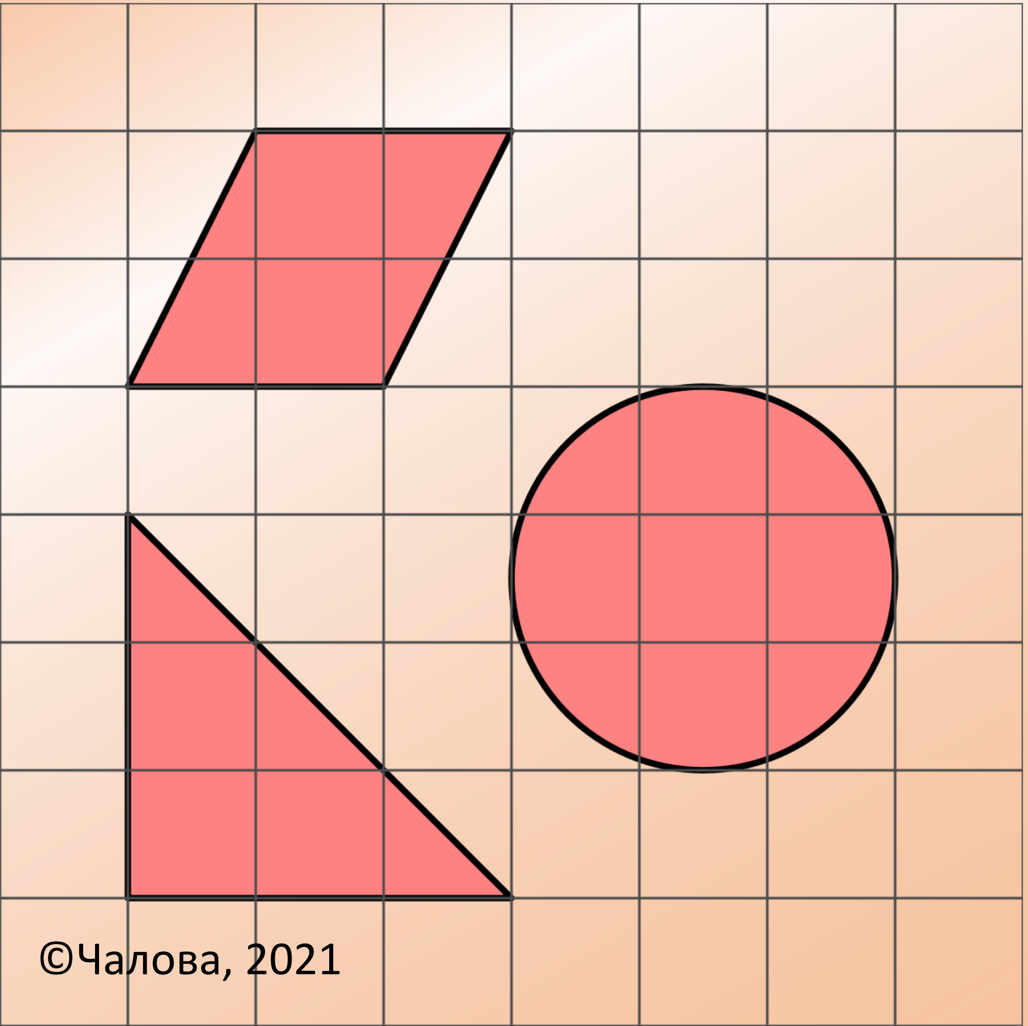
Решение геометрических задач (задание №24 ОГЭ)



Учитель математики
МБОУ СОШ №3
им. А. Верещагиной г. Туапсе
Чалова Наталья Геннадьевна

Что надо знать о задании №24 ОГЭ:

Задание ОГЭ №24 – это задание с развёрнутым ответом высокого уровня сложности.

При выполнении заданий №24 в бланке ответов №2 должны быть записаны
полное обоснованное доказательство

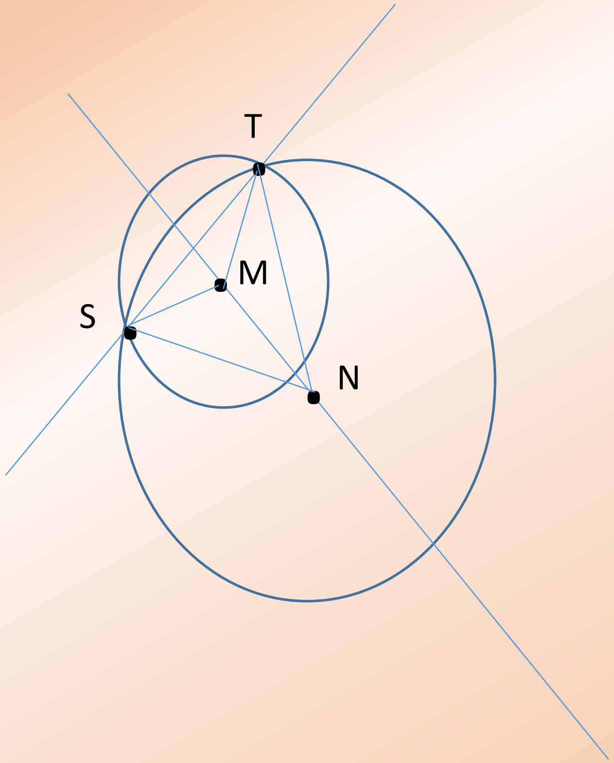
В решении должен быть выбран правильный путь решения, из письменной записи решения - понятен ход рассуждения.

За решение,
в котором полное обоснованное доказательство,
выставляется максимальное количество баллов - 2 балла.

Если в решении допущена ошибка, не имеющая принципиального характера и не влияющая на общую правильность хода доказательства, выставляется 1 балл.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

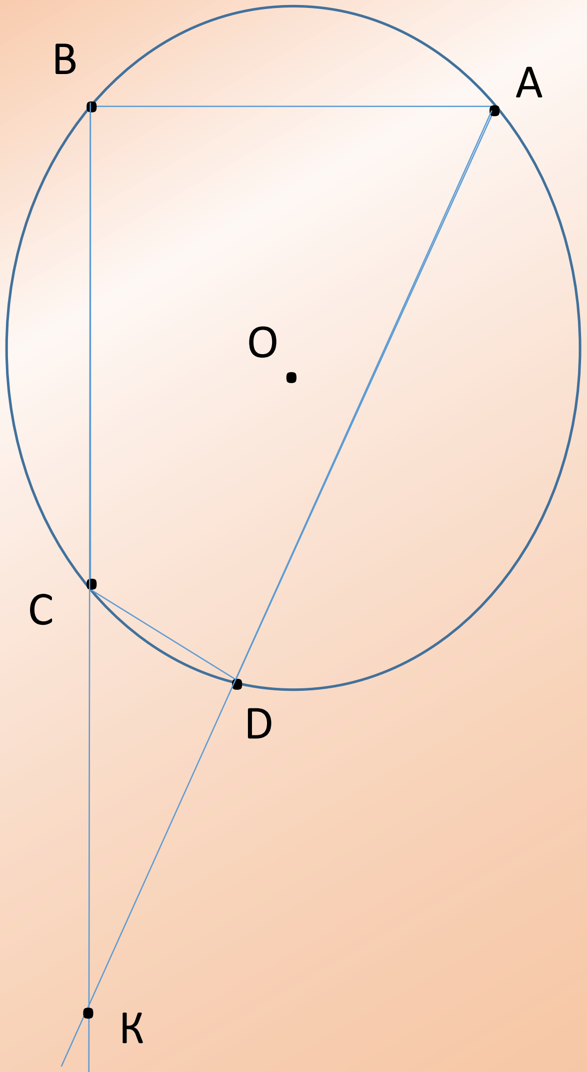
Окружности с центрами в точках M и N пересекаются в точках S и T, причём точки M и N лежат по одну сторону от прямой ST. Докажите, что прямые MN и ST перпендикулярны.



Дано: M – окружность, N – окружность,
M∩N=(·) S и (·) T,
(·) N, (·) M лежат по одну сторону от ST
Доказать:
MN⊥ST

Доказательство:
1) Выполним построение: NT, NS, MT, MS.
2) NS=NT как радиусы окружности N, MT=MS как радиусы окружности M. Значит, Δ SMN= Δ TMN (с общей стороной NM) по третьему признаку равенства треугольников. Значит, ∠ SNM=∠TNM ⇒ NM биссектриса ∠SNT.
3) Т.к. NS=NT, то ΔSNM - равнобедренный, тогда биссектриса NM является высотой ΔSNT ⇒ MN⊥ST

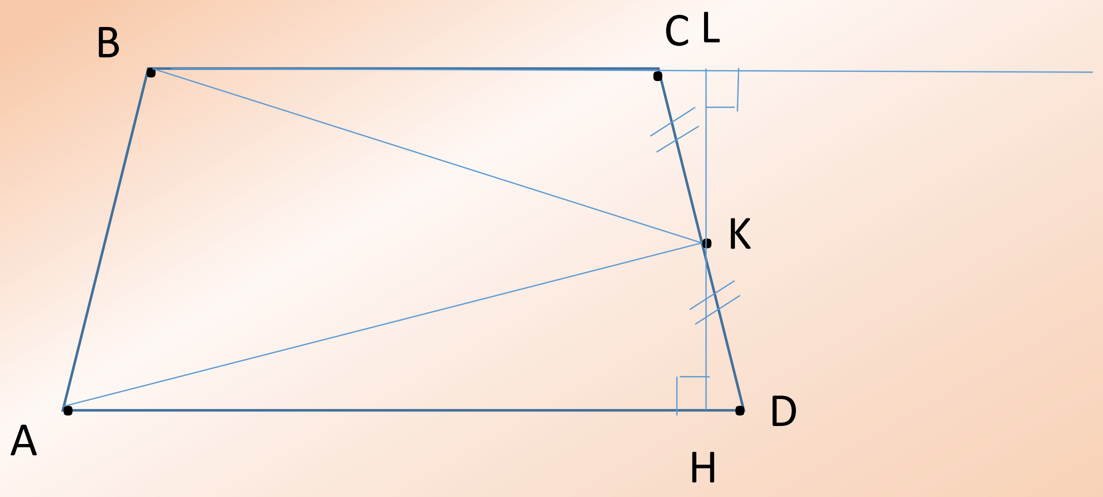
Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке К. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.



Дано:
ABCD – четырёхугольник;
O – окружность, писанная около ABCD;
AD∩BC=(·)K
Доказать:
ΔKAB∽ ΔKCD

Доказательство:
1) $\angle$ BAD$=\frac{1}{2}\cup BCD$ как вписанный угол.
2) $\angle BCD = \frac{1}{2}\cup BAD = \frac{1}{2}(360° - \cup BCD) = 180° - \frac{1}{2}\cup BCD$ как вписанный.
3) $\angle KCD$ и $\angle BCD$ - смежные ⇒ $\angle KCD = 180° - \angle BCD = 180° - (180° - \frac{1}{2}\cup BCD) = \frac{1}{2}\cup BCD$. ⇒ $\angle BAD = \angle KCD$.
4) Следовательно, в Δ KAB и ΔKCD $\angle K$ – общий, $\angle BAK = \angle KCD$.
5) По второму признаку подобия треугольников Δ KAB∽ ΔKCD.

Точка К – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника КАВ равна половине площади трапеции.

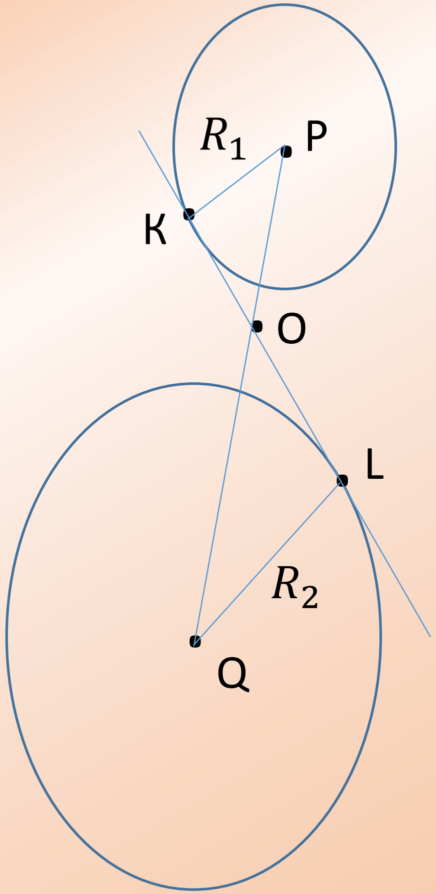


Дано:
ABCD – трапеция;
(·) К – середина боковой стороны CD;
Доказать:
$S_{KAB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Доказательство:

1) Через точку К восстановим ⊥ LH к стороне AD и продолжению стороны BC трапеции. Тогда LH – высота трапеции. Значит, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot HL$.
2) Прямоугольные ΔCKL = ΔDKH по равному вертикальному углу при вершине К и равным гипотенузам CK и DK $\Rightarrow HK = LK = \frac{1}{2}LH$
3) $S_{BCK} = \frac{1}{2}BC \cdot KL$; $S_{ADK} = \frac{1}{2}AD \cdot KH$. $S_{BCK} + S_{ADK} = \frac{1}{2}BC \cdot KL + \frac{1}{2}AD \cdot KH = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{2}HL + \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{2}HL = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(BC + AD) \cdot HL) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$;
4) $S_{KAB} = S_{ABCD} - (S_{BCK} + S_{ADK}) = S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{KAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, не одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющих их центры, в отношении a:b. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как a:b.



Прямую называют внутренней касательной к двум окружностям, если она касается каждой из окружностей, а окружности лежат по разные стороны от этой прямой.

Дано:

P – окружность, Q- окружность, не имеют общих точек;

KL- внутренняя общая касательная;

PO: QO= a:b

Доказать:

D_1:D_2=a:b,

где D_1 - диаметр первой окружности, D_2 - диаметр второй окружности.

Доказательство:

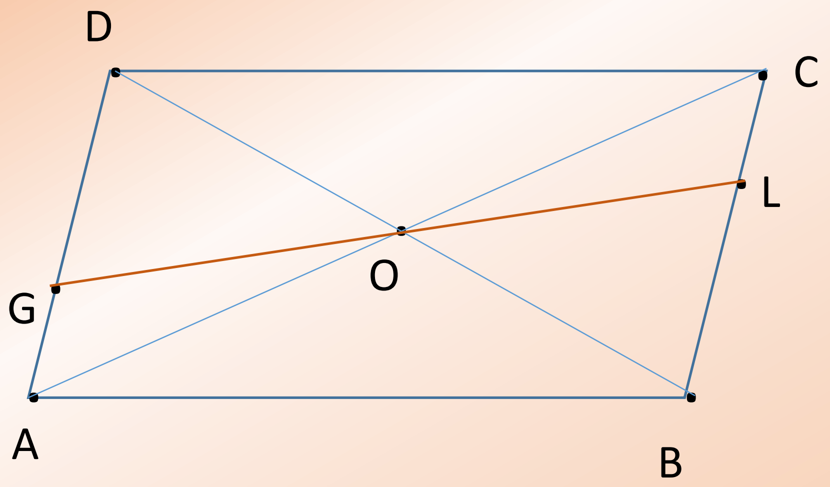
1) В окружностях проведём радиусы R_1, R_2 в точки касания. По теореме о касательной PK⊥ KL, QL⊥ KL.

2) Δ PKO ∾ Δ QLO по первому признаку подобия (∠ PKO = ∠ QLO = 90°, $\angle \mathrm{POK} = \angle \mathrm{QOL}$ как вертикальные).

$\mathrm{k} = \frac{PO}{QO} = \frac{a}{b} = \frac{KP}{QL} = \frac{R_1}{R_2}$

Используем свойство дроби: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{2R_1}{2R_2} = \frac{D_1}{D_2} \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} = \frac{a}{b}$

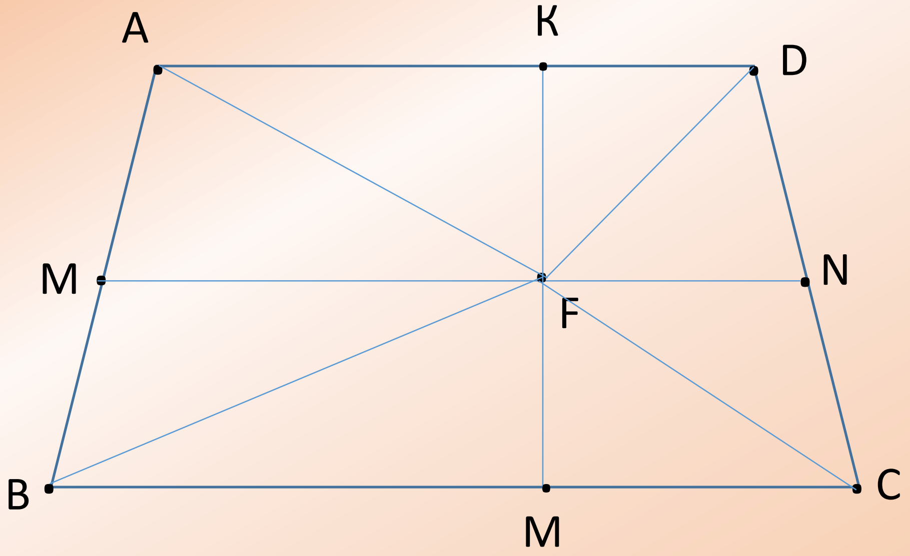
Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и G соответственно. Докажите, что CL= AG.



Дано:
ABCD - параллелограмм;
AC∩ BD =(·)O; GL проходит через (·)O;
(·)Lϵ BC, (·)G ϵ AD;
Доказать:
CL= AG

Доказательство:
1)В Δ DOG и ΔBOL углы при вершине O равны как вертикальные, $\angle GDO = \angle LBO$ как накрест лежащие при параллельных прямых DC и AB и секущей DB, DO=OB по свойству диагоналей параллелограмма.⇒
Δ DOG =Δ BOL ⇒ DG=BL.
По свойству параллелограмма AD=BC, DG=BL по доказанному выше ⇒ $AG=CL$.

На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.



Дано:

ABCD –трапеция;

AD и BC - основания; MN – средняя линия;

(·) F$\in$ MN

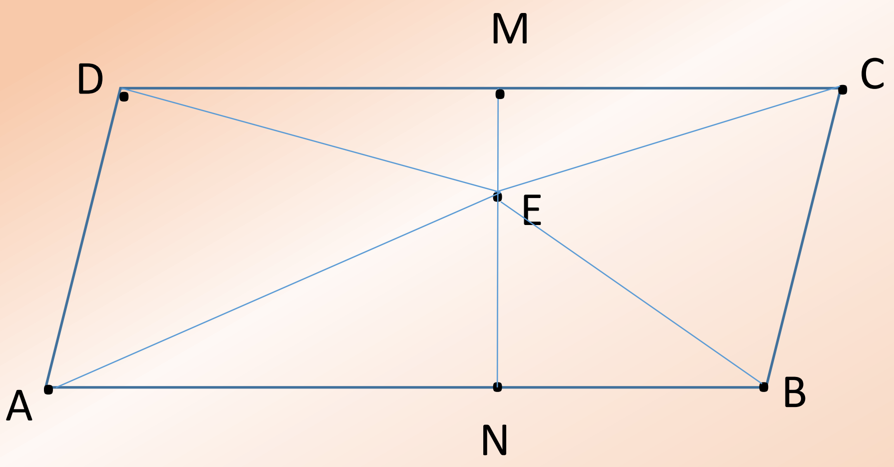
Доказать:

$S_{BFC} + S_{AFD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Доказательство:

1) Через точку F восстановим ⊥ КМ к основаниям AD и BC трапеции. КМ – является высотой трапеции.
2) Средняя линия MN параллельна основаниям ⇒ по т. Фалеса KF=FM=$\frac{1}{2}$ KM.
3) $S_{BFC} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{FM} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{KM}$; $S_{AFD} = \frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{FK} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{KM}$;
4) $S_{BFC} + S_{AFD} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{KM} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{KM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{AD})\cdot\mathrm{KM}\right) = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.



Дано:

ABCD – параллелограмм;

(·)E лежит внутри ABCD;

Доказать:

$S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Доказательство:

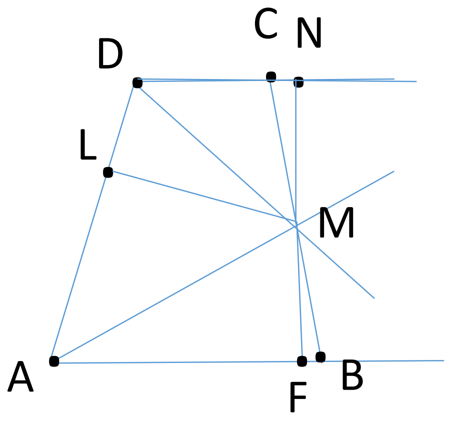
1) Через точку E восстановим ⊥ MN к AB и CD. Это будет высота параллелограмма ⇒ S_{ABCD} = AB·MN.

2) $S_{BEC} + S_{AED} = S_{ABCD} - (S_{DEC} + S_{BEA}) = S_{ABCD} - (\frac{1}{2}DC \cdot ME + \frac{1}{2}AB \cdot NE)$.

Т.к. по свойству противоположных сторон параллелограмма AB=DC , то

$S_{BEC} + S_{AED} = S_{ABCD} - (\frac{1}{2}AB \cdot ME + \frac{1}{2}AB \cdot NE) = \frac{1}{2}AB(ME+NE) = \frac{1}{2}AB \cdot MN \Rightarrow S_{BEC} + S_{AED} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Биссектрисы углов A и D трапеции ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB, AD, и CD.

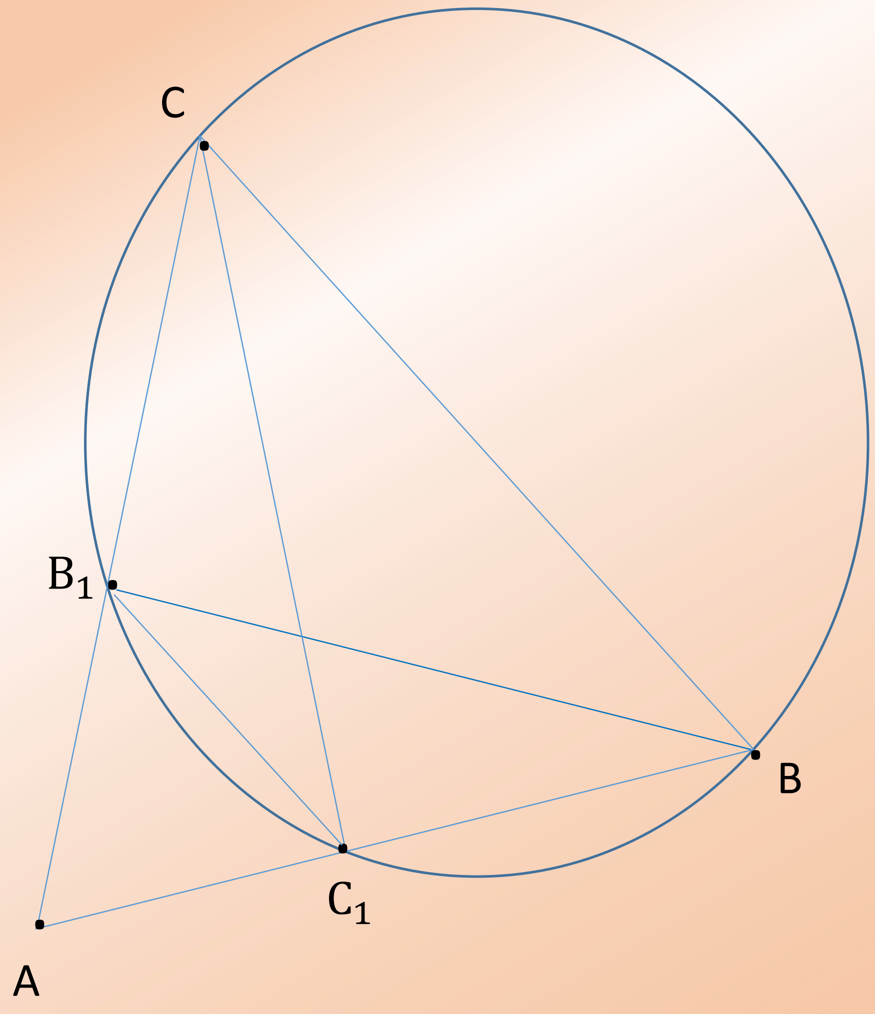


Дано:
ABCD- трапеция;
DM- биссектриса $\angle ADC$; AM - биссектриса $\angle DAB$;
$(\cdot)M \in BC$.
Доказать: $(\cdot)$ M равноудалена от прямых AB, AD, и CD.

Доказательство:

1) Расстояние от точки до прямой – длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Поэтому опустим $\perp$ из $(\cdot)$M на AB – это MF, $\perp$ из $(\cdot)$M на AD – это ML, $\perp$ из $(\cdot)$M на продолжение стороны CD – это MN.
2) В прямоугольных треугольниках MND и MLD гипотенуза MD общая, $\angle MDN = \angle MDL \Rightarrow \Delta$ MND = Δ MLD по гипотенузе и острому углу. $\Rightarrow$ $MN=ML$.
3) В прямоугольных треугольниках MFA и MLA гипотенуза AM общая, $\angle MAL = \angle MAF \Rightarrow \Delta$ MFA = Δ MLA по гипотенузе и острому углу. $\Rightarrow$ $MF=ML$. $\Rightarrow MN=ML=MF$.

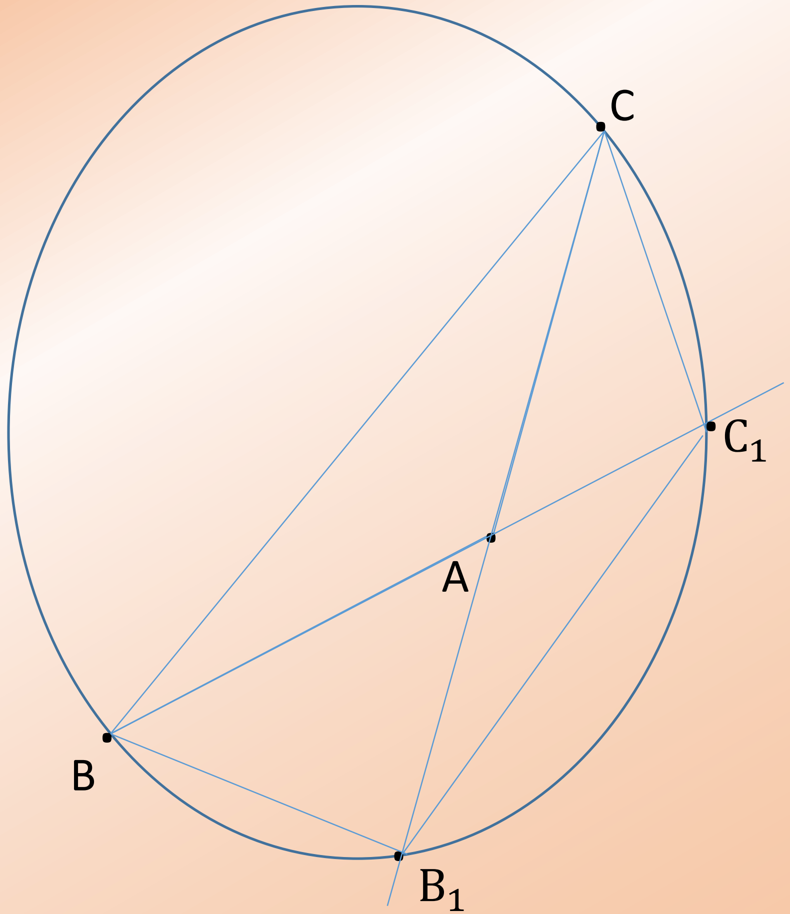
В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.



Дано:
Δ ABC – остроугольный;
BB_1, CC_1 - высоты.
Доказать:
$\angle BB_1C_1 = \angle BCC_1$

Доказательство:
1) В прямоугольном $\Delta\ CC_1B$ гипотенуза BC, а в прямоугольном $\Delta\ BB_1C$ гипотенуза также BC.
2) По следствию из теоремы о вписанном угле BC является диаметром окружности, которую можно описать около $\Delta\ CC_1B$ и $\Delta\ BB_1C$ с общей гипотенузой BC.
3) Тогда $\angle BB_1C_1$ опирается на меньшую дугу C_1B.
$\angle BCC_1$ опирается на ту же дугу C_1B. $\Rightarrow$ по следствию из теоремы о вписанном угле $\angle BB_1C_1 = \angle BCC_1$.

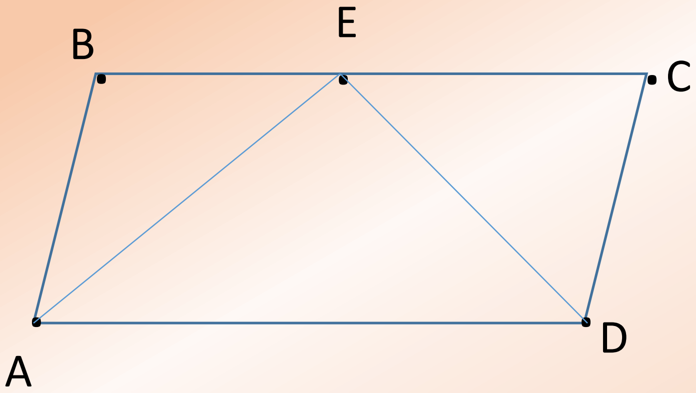
В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники B_1AC_1 и BAC подобны.



Дано:
Δ ABC, $\angle A$ – тупой;
BB_1, CC_1 - высоты.
Доказать:
$\Delta B_1AC_1 \backsim \Delta$ BAC

Решение:
1) У прямоугольных треугольников BB_1C и CC_1B общая гипотенуза BC.
2)) По следствию из теоремы о вписанном угле BC является диаметром окружности, которую можно описать около Δ CC_1B и Δ BB_1C с общей гипотенузой BC.
3) Тогда $\angle BC_1B_1$ опирается на меньшую дугу B_1B, а $\angle BCB_1$ опирается на ту же дугу B_1B. $\Rightarrow$ по следствию из теоремы о вписанном угле $\angle BC_1B_1 = \angle BCB_1$.
4) Следовательно, в треугольниках B_1AC_1 и BAC углы при вершине A равны как вертикальные, $\angle BC_1B_1 = \angle BCB_1$ как опирающиеся на одну дугу $\Rightarrow$ по первому признаку подобия треугольников $\Delta B_1AC_1 \backsim \Delta$ BAC

Биссектрисы углов A и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке E, лежащей на стороне BC. Докажите, что E – середина BC.



Дано:
ABCD- параллелограмм;
AE – биссектриса $\angle A$; DE- биссектриса $\angle D$;
$(\cdot)$ E ϵ BC.
Доказать:
$(\cdot)$ E – середина BC.

Доказательство:

1) $\angle DAE = \angle BEA$, $\angle ADE = \angle CED$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AE и DE соответственно. $\Rightarrow$По признаку равнобедренного треугольника ΔABE и ΔDCE равнобедренные. $\Rightarrow$ AB=BE, DC=CE.
2) По свойству параллелограмма AB= CD $\Rightarrow$ BE = CE.