Решение сложных задач по геометрии. Окружность. Задание № 25

Учитель математики
МБОУ СОШ № 43
Славянский район
Бевз Светлана Григорьевна

Геометрические задачи второй части

Задача 23
(на вычисление)
направлена на проверку умения решить несложную геометрическую задачу на вычисление

Задача 24
(на доказательство)
связана со свойствами треугольников, четырехугольников, окружностей

Задача 25
требует свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития, рассчитана на обучающихся, изучавших

Необходимые условия успеха при решении задач по геометрии

* Уверенное владение основными понятиями и их свойствами (определения, аксиомы, теоремы, базовые задачи)
* Знание основных методов решения задач
* Умение комбинировать методы решения задач
* Наличие опыта решения задач

* Причины ошибок в решении геометрических задач

Невнимательное чтение условия и вопроса задания.
Недостатки в работе с рисунком.
Принятие ошибочных гипотез.
Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем.
Неумение их применять.
Нарушения логики в рассуждениях.
Вычислительные ошибки.

* Критерии оценивания выполнения задания 25

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

*Методы решения геометрических задач

* Применение ключевых задач
* Метод вспомогательных построений
* Переход к равновеликим фигурам
* Метод площадей

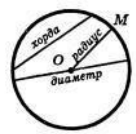
* Теория

Окружность

Окружностью называется множество точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки (*центра* окружности).

Отрезки в окружности

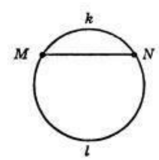
Для любой точки M окружности с центром O выполняется равенство: $OM = R$ (отрезок OM — *радиус* окружности).
Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*.
Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром* окружности (D).
$D = 2R$



Длина окружности
$C = 2\pi R$.

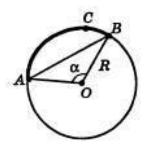
Дуга окружности
Часть окружности, заключенная между ее двумя точками, называется *дугой*.

Две любые точки M и N окружности определяют на ней две дуги: $M\breve{k}N$ и $M\breve{l}N$. Любую из этих дуг *стягивает* хорда MN.
Равные дуги стягиваются равными хордами.



Длина дуги

$\breve{ACB} = R\alpha$, где α — величина угла AOB в радианах;
$\breve{ACB} = R\frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}$, где φ — величина угла AOB в градусах.



Круг

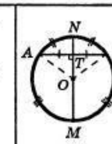
Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью.
Для всех точек N круга выполняется неравенство: $ON \leqslant R$.

Часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, называется *сектором* круга.
Любые два радиуса задают два сектора.

Часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой, называется *сегментом*.
Любая хорда делит круг на два сегмента.
Сегмент, задаваемый диаметром, называется *полукругом*.

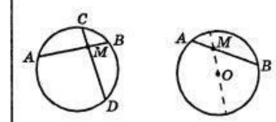
Круг (продолжение)

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам.
Если диаметр делит хорду, не являющуюся диаметром, пополам, то он ей перпендикулярен.



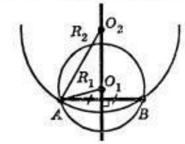
$MN \perp AB \Rightarrow AT = BT$

Если две хорды AB и CD имеют общую точку M, то
$AM \cdot MB = CM \cdot MD$.
Для данной точки M внутри окружности произведение отрезков хорды, на которые делит ее данная точка, есть величина постоянная и равная:
$(R + OM)(R - OM)$.



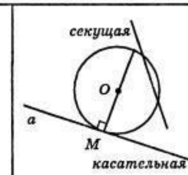
$AM \cdot MB = (R + OM)(R - OM) = R^2 - OM^2$

Центры всех окружностей, проходящих через две данные точки, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку с концами в данных точках.



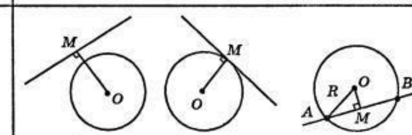
Прямая и окружность

Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется *касательной* к окружности; прямая, имеющая с окружностью две общие точки, — *секущей*.
Прямая касается окружности тогда и только тогда, когда диаметр, проходящий через общую точку прямой и окружности, перпендикулярен этой прямой.



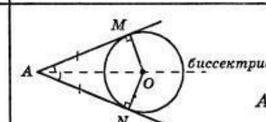
$OM \perp a$

Если расстояние OM от центра окружности до прямой
больше радиуса — прямая не имеет с окружностью общих точек;
равно радиусу — прямая касается окружности;
меньше радиуса — окружность высекает на прямой хорду длиной $2 \cdot \sqrt{R^2 - OM^2}$.



$OM > R$ $OM = R$ $OM < R$

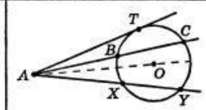
Если окружность касается сторон данного угла, то:
центр окружности лежит на биссектрисе угла, отрезки касательных равны между собой.



$AM = AN$

Прямая и окружность (продолжение)

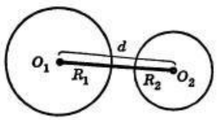
Если из точки вне окружности к ней проведены касательная и секущая, то *квадрат длины отрезка касательной равен произведению всего отрезка секущей на его внешнюю часть.*
Произведения длин отрезков секущих, проведенных из одной точки, равны.



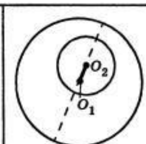
$AT^2 = AB \cdot AC =$
$= AX \cdot AY =$
$= (OA - R)(OA + R) =$
$= OA^2 - R^2$

Две окружности

Если расстояние d между центрами двух окружностей больше суммы ($R_1 + R_2 < d$) или меньше разности ($R_1 - R_2 > d$) их радиусов, то окружности не имеют общих точек.



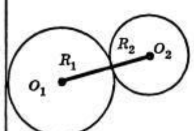
$R_1 + R_2 < d$



$R_1 - R_2 > d$

Если $R_1 + R_2 = d$ или $R_1 - R_2 = d$, то окружности касаются (внешним или внутренним образом).

внешнее касание

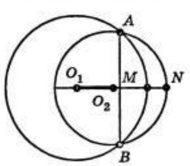


$R_1 + R_2 = d$

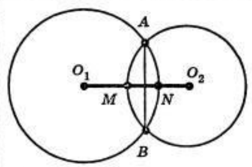
внутреннее касание

$R_1 - R_2 = d$

Если $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$, то окружности имеют общую хорду.



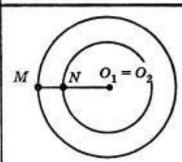
$MN = R_2 - R_1 + d$



$MN = R_1 + R_2 - d$

$AB = \dfrac{4S_{O_1AO_2}}{d}$

Две окружности, имеющие общий центр, называются *концентрическими.*

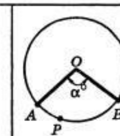


$MN = R_1 - R_2$
$d = 0$

Углы в окружности

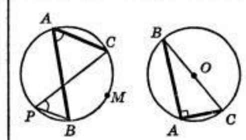
Центральным углом в окружности называется угол между двумя ее радиусами.

Градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается (измеряется дугой, на которую он опирается).



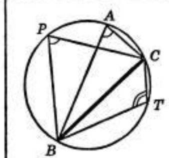
$\angle AOB = \overset{\smile}{APB} = \alpha°$

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны содержат хорды, называется *вписанным углом.*
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.
Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же *дугу*, равны.



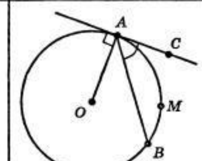
$\angle BAC = \angle BPC =$
$= \frac{1}{2} \overset{\smile}{BMC}$
$\angle BAC = 90°$

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же *хорду*, либо равны, либо их сумма 180°.



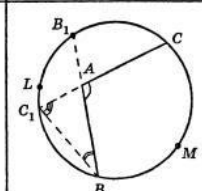
$\angle BPC = \angle BAC$
$\angle BAC + \angle BTC = 180°$

Угол между *хордой и касательной* измеряется *половиной* содержащейся в этом угле *дуги* окружности.



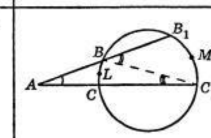
$\angle BAC = \frac{1}{2} \overset{\smile}{BMA}$

Угол с вершиной внутри окружности (угол между двумя хордами).



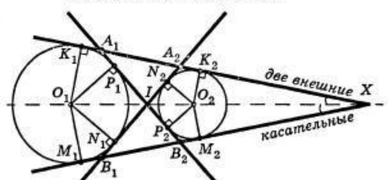
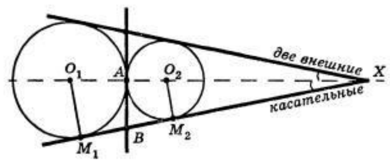
$\angle BAC = \angle CC_1B +$
$+ \angle B_1BC_1 =$
$= \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BMC} + \overset{\smile}{B_1LC_1})$

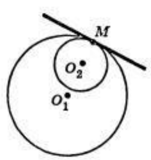
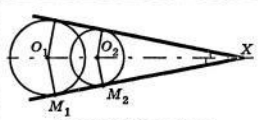
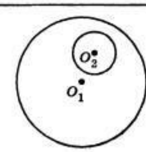
Угол с вершиной вне окружности (угол между двумя секущими).



$\angle BAC = \angle C_1BB_1 -$
$- \angle CC_1B =$
$= \frac{1}{2}(\overset{\smile}{B_1MC_1} - \overset{\smile}{BLC})$

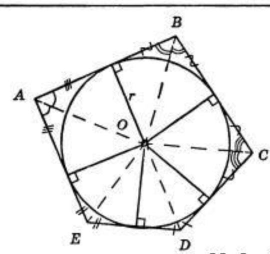
Общие касательные двух окружностей

Если одна окружность лежит вне другой, то у них *четыре общие касательные*.	Если одна окружность касается другой снаружи, то у них *три общие касательные*.
две внутренние касательные 	*одна внутренняя касательная* 
$d = O_1O_2 > R_1 + R_2$ $IO_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} d$; $M_1M_2^2 + (R_1 - R_2)^2 = d^2$ $IO_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} d$; $N_1N_2^2 + (R_1 + R_2)^2 = d^2$	$d = R_1 + R_2$ $M_1M_2 = 2\sqrt{R_1R_2}$ $M_1B = BA = BM_2$

Если одна окружность касается другой изнутри, то у них *одна общая касательная*.	Если окружности пересекаются, то у них *две общие касательные* (две внешние касательные, внутренних касательных нет).	Если одна окружность лежит внутри другой, то *общих касательных нет*.
	 Если $O_1O_2 = d$, то $M_1M_2^2 + (R_1 - R_2)^2 = d^2$	

Вписанная окружность

Окружность называется *вписанной в многоугольник*, если она касается всех его сторон.
Ее центр должен принадлежать всем *биссектрисам внутренних углов* этого многоугольника. Ее радиус можно вычислить по формуле $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь, а p — полупериметр многоугольника.
Не во всякий многоугольник можно вписать окружность.



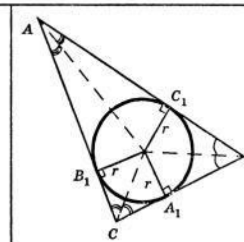
Вписанная окружность (продолжение)

В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Ее центр лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов, а радиус может быть вычислен по формулам:

$r = \frac{S}{p}$

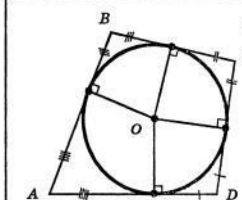
$r = (p-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} = (p-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{B}{2} = (p-c)\,\mathrm{tg}\,\frac{C}{2}$,

где S — площадь треугольника, а p — его полупериметр.



$AB_1 = AC_1 = p - a$
$BC_1 = BA_1 = p - b$
$CA_1 = CB_1 = p - c$
$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр

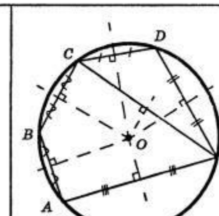
В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.



$AB + CD = BC + AD$

Описанная окружность

Окружность называется *описанной около многоугольника*, если она проходит через все его вершины. Ее центр лежит на всех *серединных перпендикулярах* сторон (и диагоналей) этого многоугольника. Радиус вычисляется как радиус окружности, описанной около треугольника, определенного любыми тремя вершинами данного многоугольника.



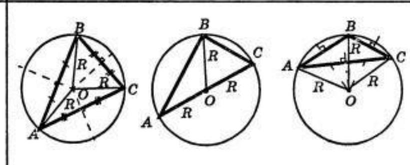
$OA = OB = OC = OD = OE = R$

Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Ее центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника, а радиус вычисляется по формулам:

$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$

$R = \frac{abc}{4S}$

a, b, c — длины сторон треугольника, S — его площадь.

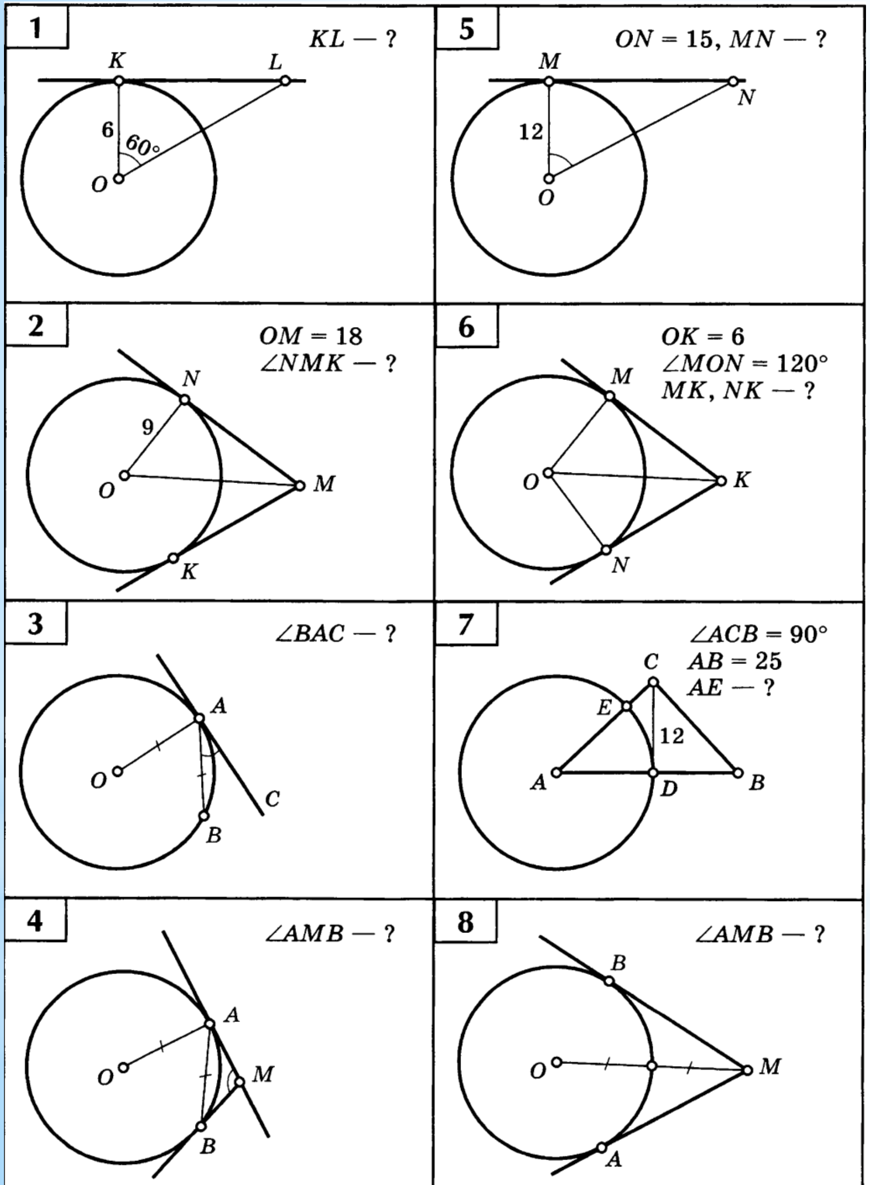


$\angle B \leqslant 90° \Rightarrow \angle AOC \leqslant 2B$

$\angle B > 90° \Rightarrow \angle AOC = 180° - 2B$

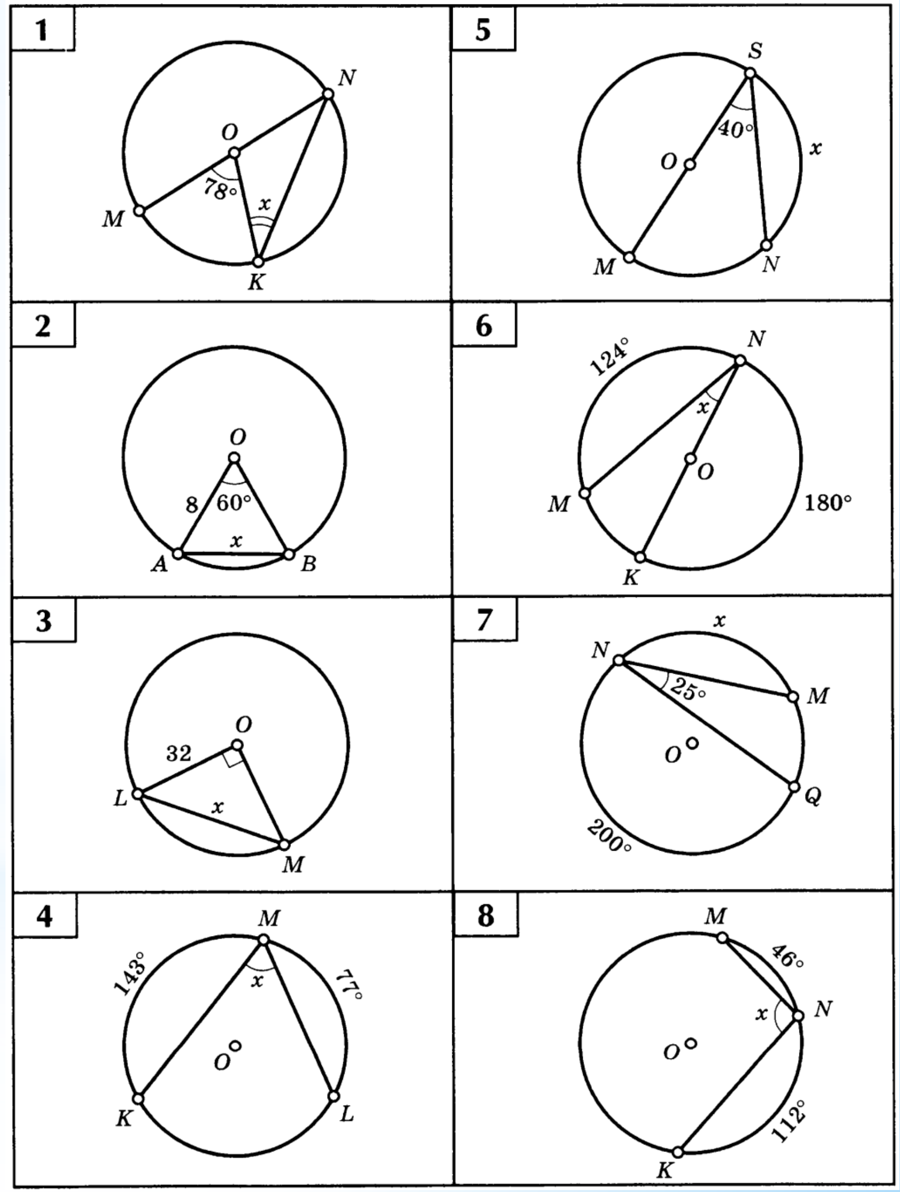
* Задачи для устной работы.

Касательная к окружности



Центральные и вписанные углы

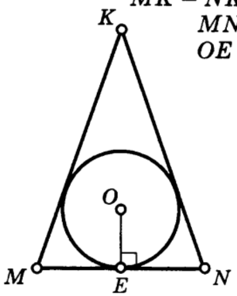
Найдите x.



Вписанная и описанная окружности

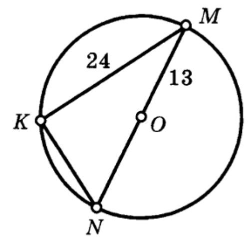
1

$MK = NK = 26$
$MN = 20$
OE — ?



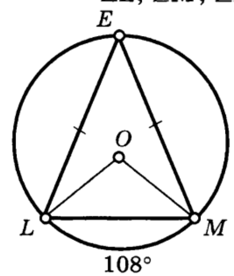
3

$P_{\Delta KMN}$ — ?



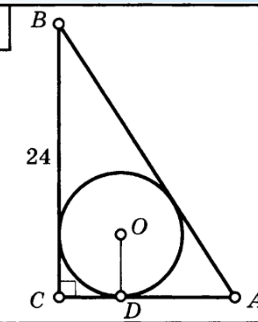
7

$\angle L$, $\angle M$, $\angle E$ — ?



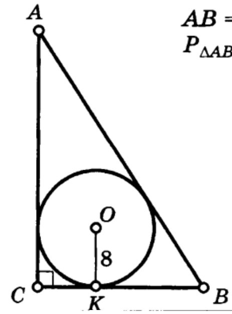
11

$AC = 10$
OD — ?



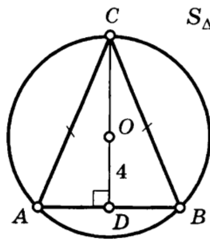
2

$AB = 52$
$P_{\Delta ABC}$ — ?



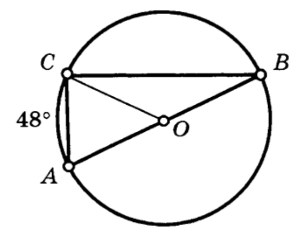
4

$AB = 6$
$S_{\Delta ABC}$ — ?



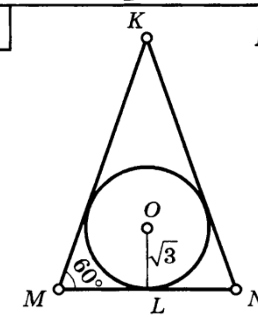
8

$\angle A$, $\angle B$, $\angle ACB$ — ?



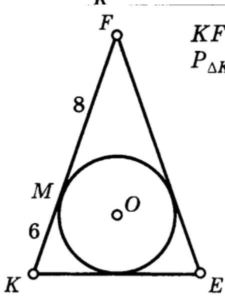
12

MN — ?



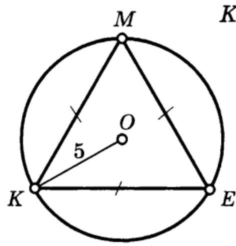
5

$KF = EF$
$P_{\Delta KFE}$ — ?



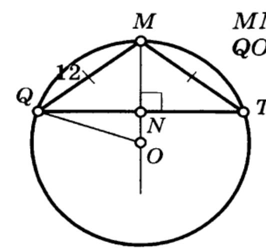
9

KE — ?



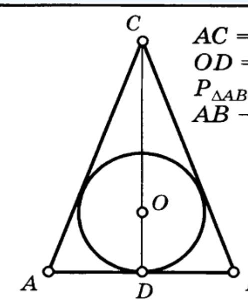
13

$MN = 8$
QO — ?



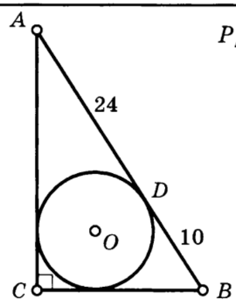
17

$AC = BC$
$OD = 0{,}4\ CD$
$P_{\Delta ABC} = 40$
AB — ?



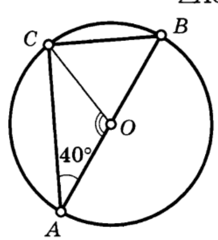
6

$P_{\Delta ABC}$ — ?



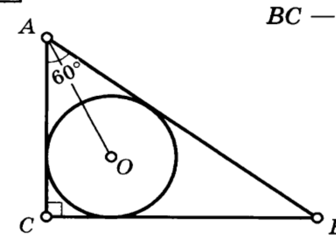
10

$\angle AOC$ — ?



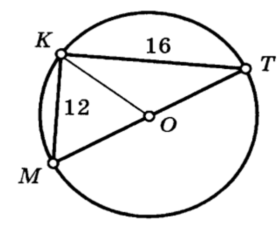
14

$AO = 20$
BC — ?



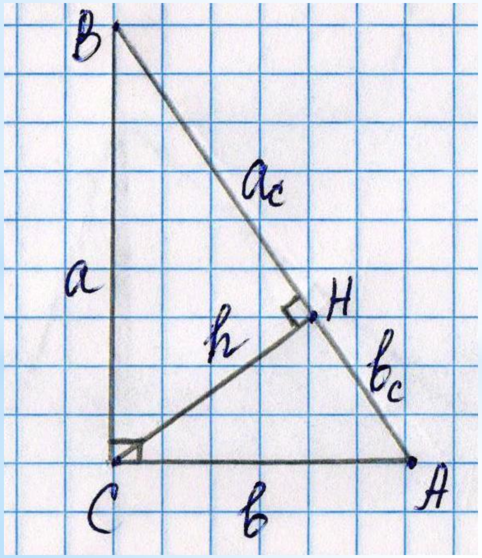
18

KO — ?



Ключевая задача

В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, делит её на отрезки 18 и 32. Найти высоту.



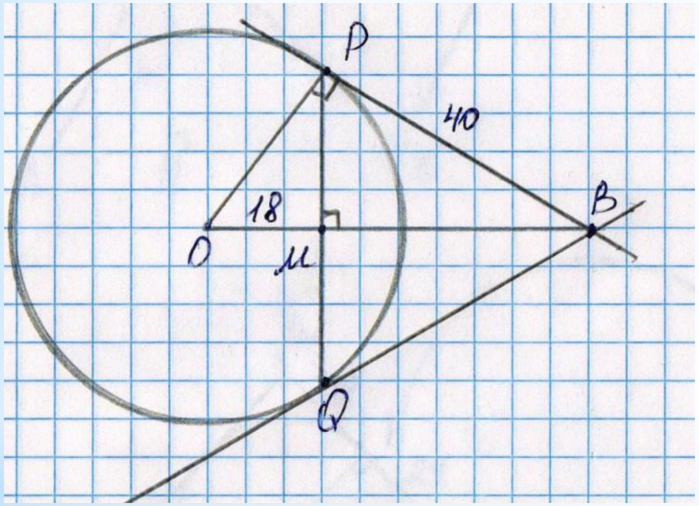
1) $h^2 = a_c b_c$; $h^2 = 32 \cdot 18$; $h = \sqrt{16 \cdot 9 \cdot 4} = 24$

ответ: 24

*Задача 1

(решение задачи с использование ключевой задачи)

Из точки B к окружности проведены касательные BP и BQ (P и Q – точки касания). Найти длину хорды PQ, если длина отрезка PB= 40, а расстояние от центра окружности до хорды PQ равна 18.



Решение

1)PQ = 2PM; Δ OPB – прямоугольный, PM – высота.

$PB^2 = OB \cdot MB$

2)Пусть BM = x, x > 0, тогда

$40^2 = (18+x) \cdot x$

$x^2 + 18x - 1600 = 0$

$x_1 = 32 \; x_2 = -50$

$PM^2 = OM \cdot MB$

$PM^2 = 18 \cdot 32$

$PM = 24$

$PQ = 48$

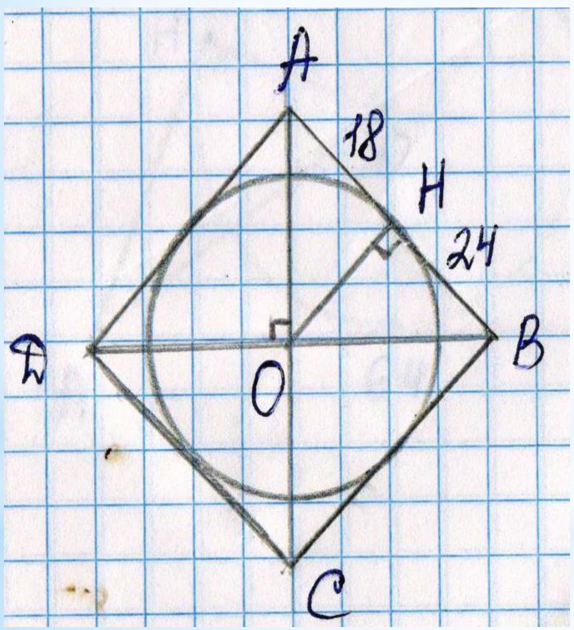
Ответ: 48

* Задача 2.

(решение задачи с использование ключевой задачи)

Окружность вписана в ромб. Радиус, проведённый из центра окружности к стороне ромба, делит её на отрезки 18 и 24. Найдите радиус вписанной окружности.

Решение



Радиус вписанной в ромб окружности есть высота прямоугольного треугольника OAB,

$$r = OH = \sqrt{AH \cdot HB}$$

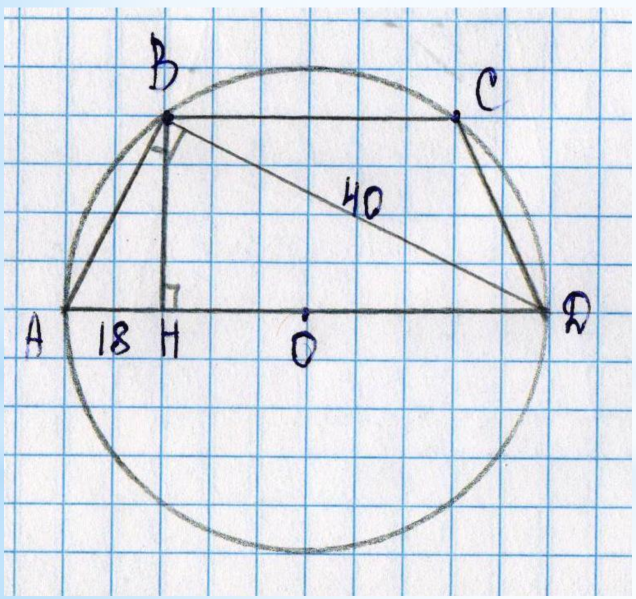
$$r = \sqrt{18 \cdot 24} = 12\sqrt{3}$$

Ответ: $12\sqrt{3}$

*Задача 3

(решение задачи с использование ключевой задачи)

Большее основание трапеции является диаметром описанной окружности. Определите высоту трапеции, если её диагональ равна 40, а меньшей из отрезков, на которые делит основание высота, равен 18.



1)Описать окружность можно только около равнобедренной трапеции.

2)ΔABC – прямоугольный (угол B – вписанный, опирается на диаметр).

$$\Delta ABD(\angle B = 90^\circ)$$

$$BD^2 = AD\cdot HD,\quad HD = x,\quad x > 0$$

$$40^2 = (18+x)x,\quad x^2 + 18x - 1600 = 0$$

$$D = 81 + 1600 = 1681$$

$$x_1 = 32,\quad x_2 = -50,\quad -50 < 0$$

$$4)BH = \sqrt{AH\cdot HD} = \sqrt{18\cdot 32} = 24$$

Ответ: 24

Этапы решения геометрических задач

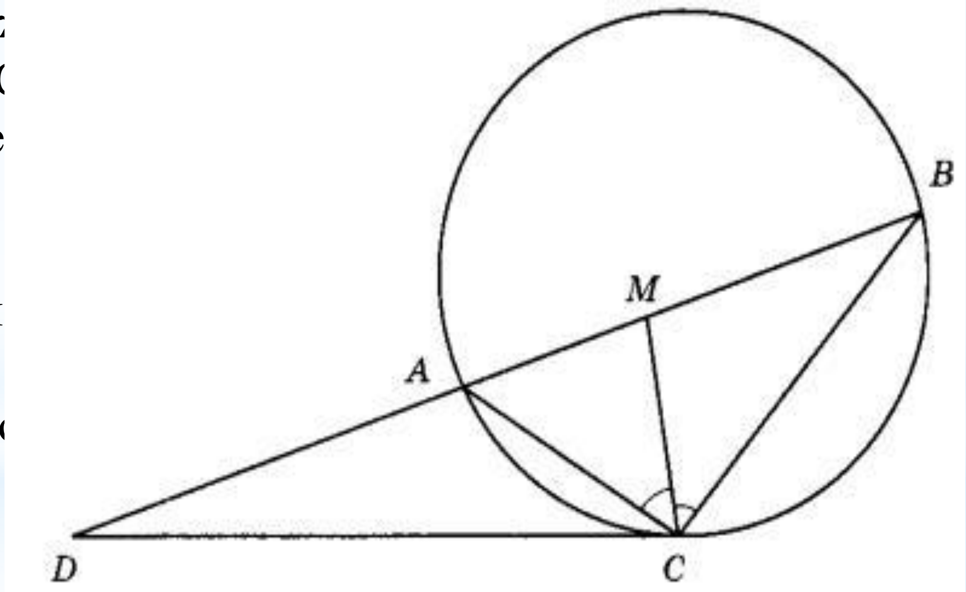
1. Чтение условия задачи.
2. Выполнение чертежа с буквенными обозначениями.
3. Краткая запись условия задачи (формирование базы данных).
4. Перенос данных условия на чертёж, выделение элементов чертежа разными цветами.
5. Запись требуемых формул и теорем на черновике (формирование базы знаний).
6. «Деталировка» - вычерчивание отдельных деталей на дополнительных чертежах.
7. Анализ данных задачи, привязка искомых величин к элементам чертежа.
8. «Синтез» - составление «цепочки» действий (алгоритм решения).
9. Реализация алгоритма решения.
10. Проверка правильности решения.
11. Запись ответа.

Задача 1.

Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AM = 5 и MB =10. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Этапы решения:

1.Делаем чертеж.
2.Определяем равенство угла ме
касательной и хордой и угла AB
3.Определяем соотношение отре
из свойства биссектрисы угла
треугольника и найдем AB.
4.Показываем, что треугольники
DAC и DCB подобны.
5.Составляем соотношения сторо
подобных треугольников.
6.Составляем систему равенств.
7.Решаем систему.
8.Записываем ответ.



*

1. Выполняем чертеж данной задачи
2. Рассматриваем ACD. Согласно свойству углов окружности, касательной и секущей, угол, который образован этими линиями, равен половине градусной меры дуги, заключенной между сторонами этого угла. $\angle DCA$ равен половине градусной меры дуги AC, заключенной между его сторонами CD и CA. Но вписанный $\angle CBA$ опирается на ту же дугу AC и по свойству вписанного угла равен половине меры этой дуги. Следовательно,
   $\angle CBA = \angle ACD$.

3. Согласно свойству биссектрисы угла треугольника, она делит *AB* на отрезки *AM* и *MB,* пропорциональные сторонам *AC* и *BC*. Таким образом,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}.$$

$$AB = 5 + 10 = 15, \qquad CB = 2AC.$$

4. Рассмотрим DAC и DCB. У них:
$\angle DCA = \angle DBC$ по доказанному выше, $\angle D$ – общий. Следовательно, DAC подобен DCB по двум углам.

5. Из определения и свойств подобных треугольников имеем:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AC} = 2$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{BD-15} = 2$$

6. Составим систему равенств:

$$\begin{cases} BD(BD-15) = CD^2 \\ BD = 2 \cdot CD \end{cases},$$

7. Решим систему:

$$2CD(2DC - 15) = CD^2$$

$$2CD(2CD - 15) = CD^2$$

$$4CD - 30 = CD$$

$$3CD = 30$$

$$CD = 10$$

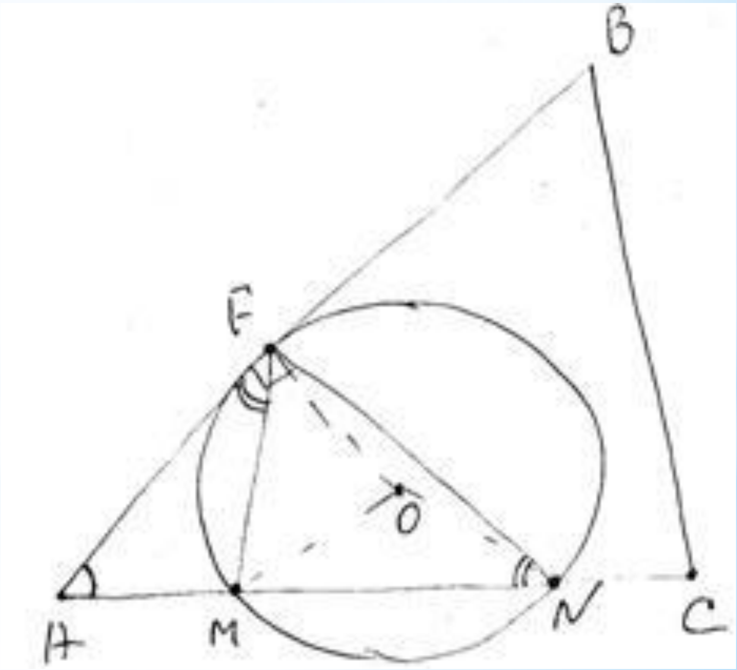
Ответ: *10*

Задача 2

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 11 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если cos ∠BAC = √11 / 6

Этапы решения:

1. Сделаем чертеж.
2. Установим подобие треугольников AFM и ANF.
3. Определим сторону FM.
4. Определим ∠FNA.
5. Найдем синус ∠FNM .
6. Составим теорему синусов и найдем радиус окружности.
7. Запишем ответ.



Решение

1. Рассмотрим треугольники AFM и ANF. Угол A является общим, а $\angle AFM = \angle FNM = \frac{1}{2}\angle FOM$ по доказанному выше. Следовательно, треугольник AFM подобен треугольнику ANF по двум углам. Отсюда вытекает:

$$AF^2 = AN \cdot AM = 11 \cdot 9$$

$$AF = \sqrt{11 \cdot 9} = 3\sqrt{11}$$

3. В треугольнике AFM сторона AF=3, сторона AM=9. Воспользуемся теоремой косинусов для определения FM:

$$FM^2 = AF^2 + AM^2 - 2 \cdot AF \cdot AM \cdot \cos A$$

$$FM^2 = 99 + 81 - 2 \cdot 3\sqrt{11} \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$FM^2 = 81$$

$$FM = 9$$

Полученное значение означает, что AFM является равнобедренным. У него основание AF.

4. По свойству равнобедренного треугольника ∠FAM=∠AFM. Отсюда

$$\angle FAM = \angle AFM = \angle FNA$$

5. Найдем

$$\cos\angle FNA = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\sin\angle FNA = \sqrt{1-\cos^2\angle FNA}$$

$$\sin\angle FNA = \sqrt{1-\frac{11}{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

$$\sin\angle FNM = \sin\angle FNA = \frac{5}{6}$$

6. Из FMN по теореме синусов:

$$\frac{FM}{\sin\angle FNM} = 2R$$

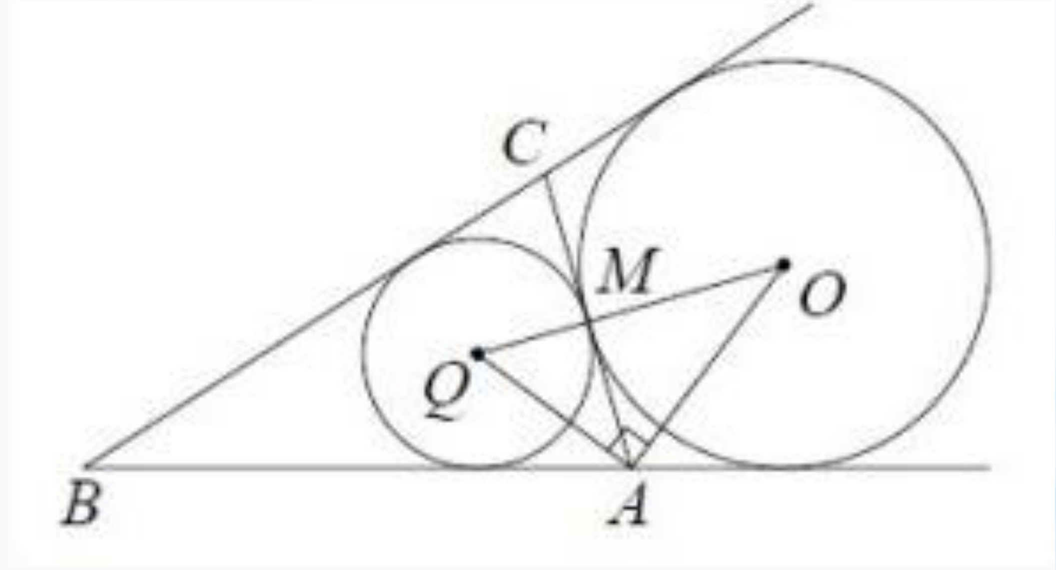
где R – радиус описанной окружности. Отсюда получим значение радиуса окружности:

$$9 : \frac{5}{6} = 2R \Rightarrow R = 5{,}4$$

Ответ: *5,4*

* Задача 3

Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .



* Решение

Пусть O — центр данной окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

Точка касания M окружностей делит AC пополам по условию.

Лучи AQ и AO — биссектрисы смежных углов, так как касательные к окружностям равноудалены от центра. Так как AQ и AO — биссектрисы смежных углов, то угол OAQ прямой – смежные углы в сумме дают 180°, значит сумма их биссектрис: 180°/2 = 90°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник OAQ. По свойству высоты в прямоугольном треугольнике, получаем:

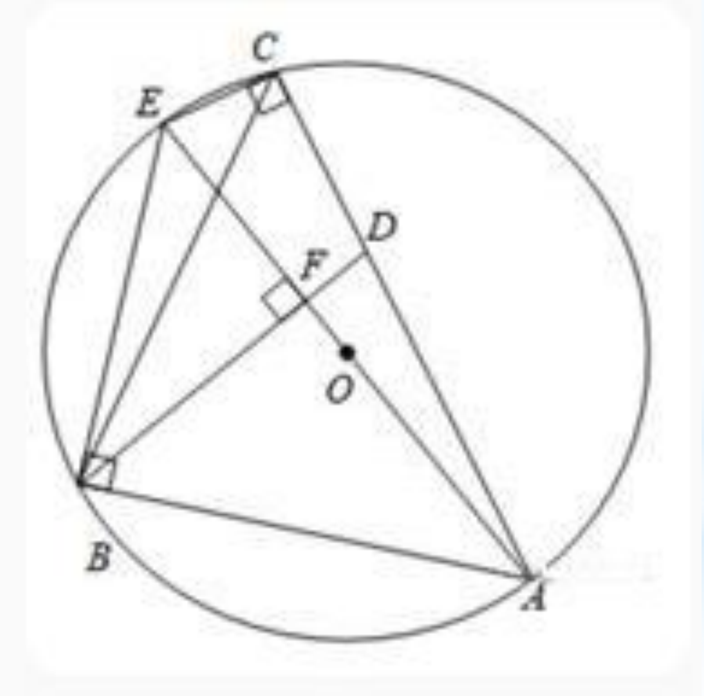
$AM^2 = MQ \bullet MO$ Отсюда: $QM = AM^2 / MO$

$QM = 6^2 / 8 = 4{,}5$

Ответ: *4,5*

* Задача 4

В треугольнике ABC известны длины сторон AB=36, AC=54, точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.



Решение

При построении прямой AO образовалась точка пересечения этой прямой с окружностью, обозначим её буквой E и соединим с точкой B и с точкой C. Получим вписанные углы ABE и ACE, опирающиеся на диаметр AE, следовательно угол ABE и ACE равны по 90^0.

Рассмотрим треугольники ABE и ABF: у них углы ABE и AFB прямые, угол EAB – общий, следовательно, эти треугольники подобны.

Составим отношение сторон:

$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF}$ откуда по свойству пропорции $AB^2=AE \bullet AF$

Рассмотрим треугольники ACE и ADF, у которых углы ACE и AFD прямые, а угол FAD – общий. Значит, треугольники ACE и ADF подобны.

Составим отношение сторон:

$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AF}$; откуда выразим $AD = AE \bullet \frac{AF}{AC} = \frac{AE \bullet AF}{AC}$

Теперь рассмотрим наши два полученных равенства: $AB^2=AE \bullet AF$ и $AD=\frac{AE \bullet AF}{AC}$

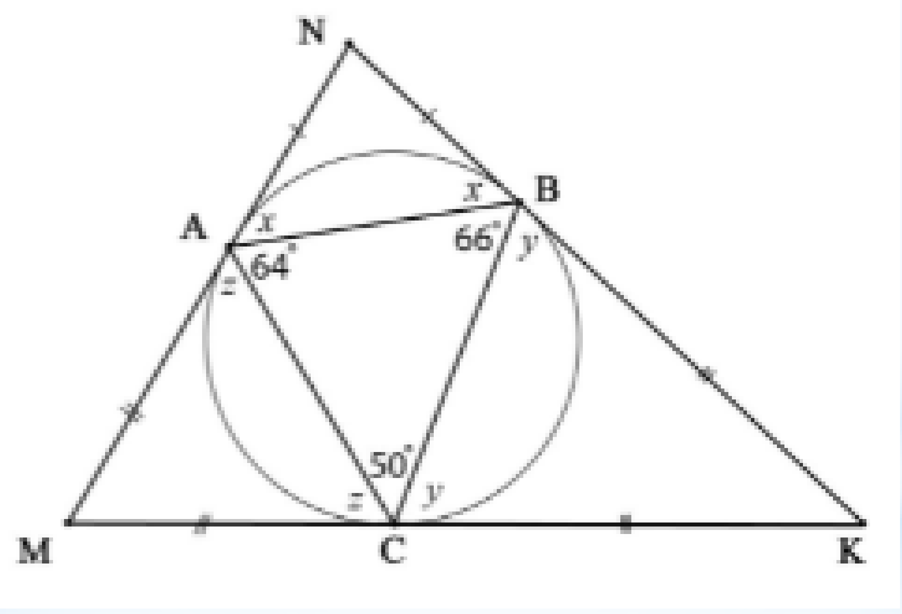
Видим, что $36^2=AE \bullet AF$ (подставили вместо AB значение 36), также у нас известно, что AC=54. Найдем из второго равенства $AD=\frac{AE \bullet AF}{AC} = \frac{36^2}{54} = 24$

Теперь найдем CD=AC-AD=54-24=30

Ответ: *30*

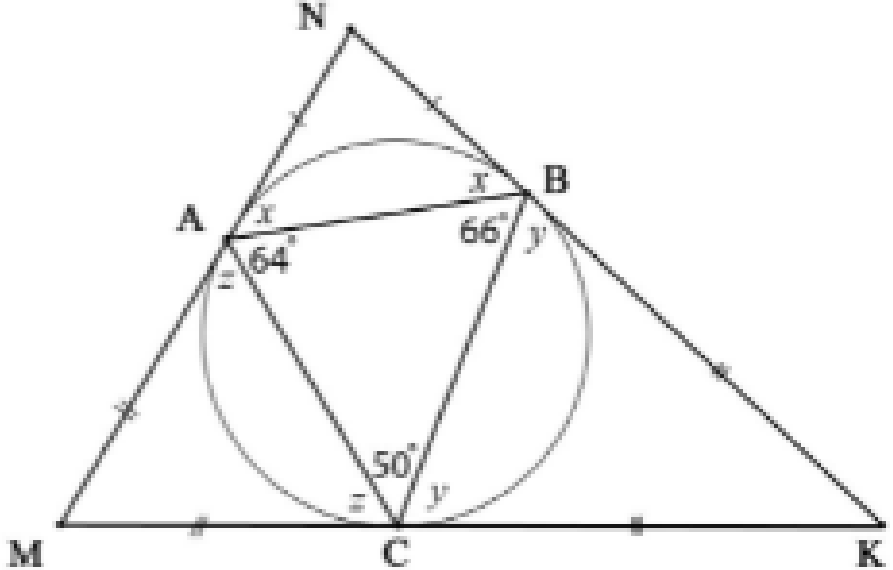
* Задача 5

Окружность, вписанная в треугольник MNK, касается его сторон в точках A, B и C. Найдите углы треугольника MNK, если углы треугольника ABC равны $64°$, $66°$ и $50°$.



Решение.

1) Рассмотрим треугольник ABN. Так как NA и NB - отрезки касательных, проведенных из одной точки, то $NA = NB$ и, следовательно, треугольник ABN - равнобедренный, откуда $\angle NAB = \angle NBA$. Обозначим эти углы через x.



2) Аналогично получаем $\angle KBC = \angle KCB$ (обозначим эти углы через y) и $\angle MCA = \angle MAC$ (обозначим эти углы через z).

3) Получаем систему уравнений:

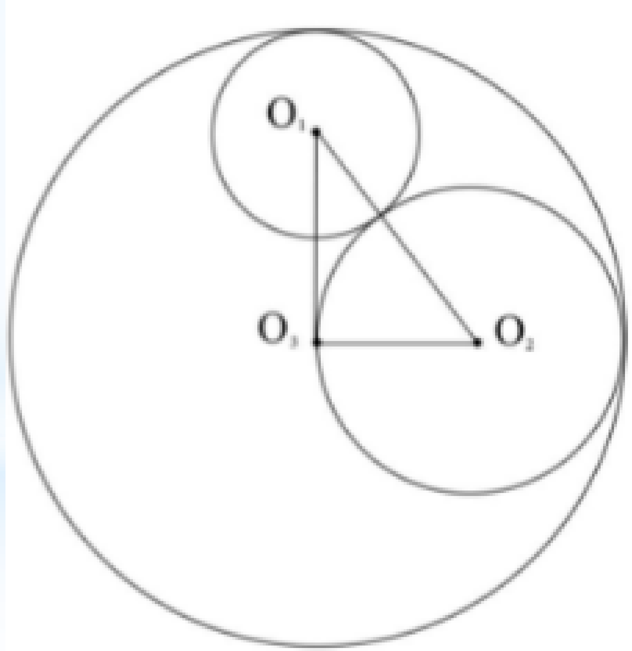
$$\begin{cases} x + 64° + z = 180° \\ x + 66° + y = 180°; \\ y + 50° + z = 180° \end{cases}$$

Решая эту систему (например, методом подстановки) получаем $x = 50°$, $y = 64°$, $z = 66°$. Теперь найдем углы треугольника MNK, используя теорему о сумме углов треугольника: $\angle N = 180° - 2x = 80°$; $\angle K = 180° - 2y = 52°$; $\angle M = 180° - 2z = 48°$.

Ответ: 80°, 52°, 48°.

* Задача 6

Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 10 и 15 касаются друг друга внешним образом и внутренним образом касаются окружности с центром O_3 и радиуса 30. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$.



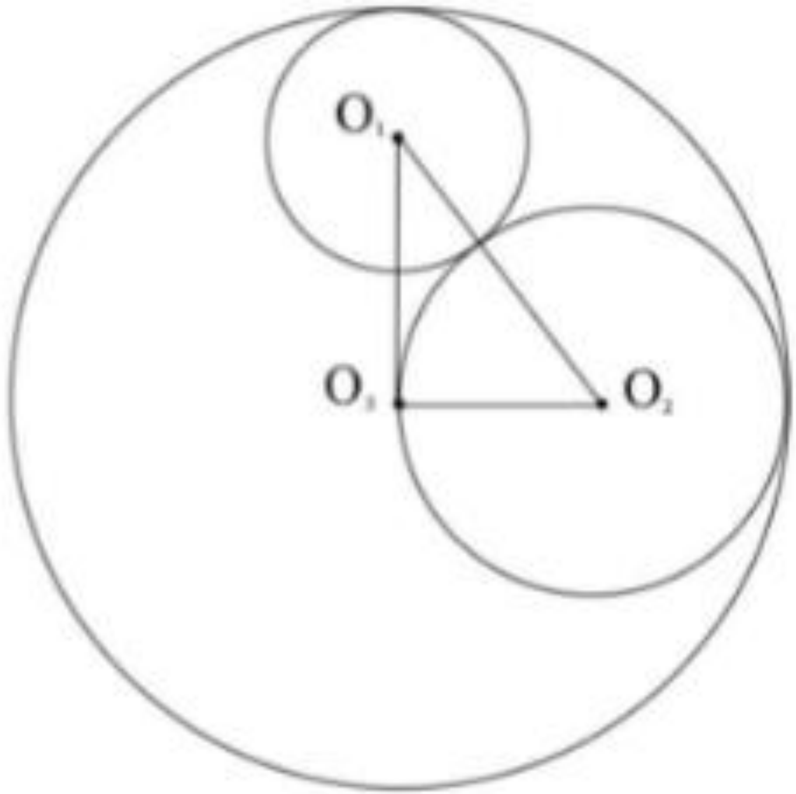
Решение.

1) Найдем стороны треугольника $O_1O_2O_3$ из условия касания окружностей:

$$O_1O_2 = 10 + 15 = 25;$$
$$O_2O_3 = 30 - 15 = 15;$$
$$O_1O_3 = 30 - 10 = 20.$$

2) Так как $15^2 + 20^2 = 25^2$, то треугольник $O_1O_2O_3$ прямоугольный.

3) Радиус вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$ окружности найдем по формуле $r = \frac{S}{p}$, где S – площадь треугольника $O_1O_2O_3$, а p – полупериметр треугольника $O_1O_2O_3$.

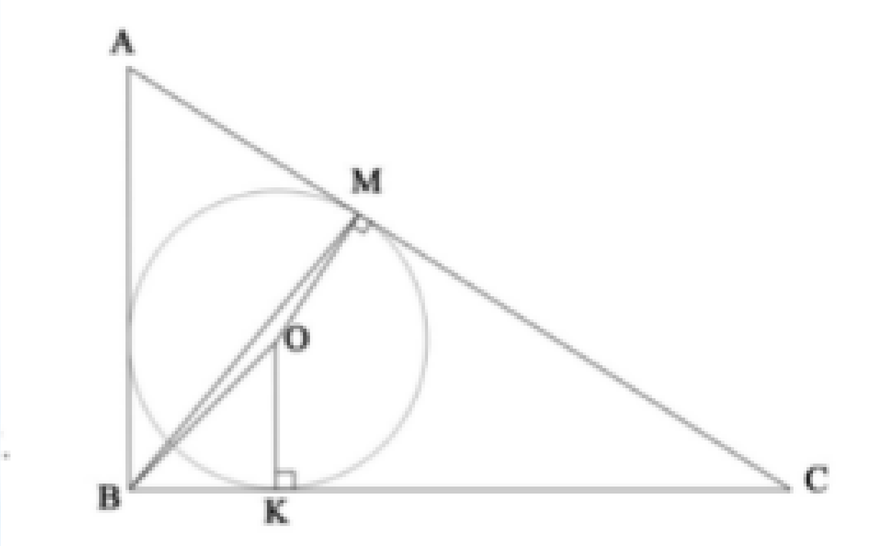


$$S = \frac{1}{2}O_1O_3 \cdot O_2O_3 = 150;$$
$$p = \frac{1}{2}(O_1O_2 + O_2O_3 + O_1O_3) = 30;$$
$$r = \frac{S}{p} = 5.$$

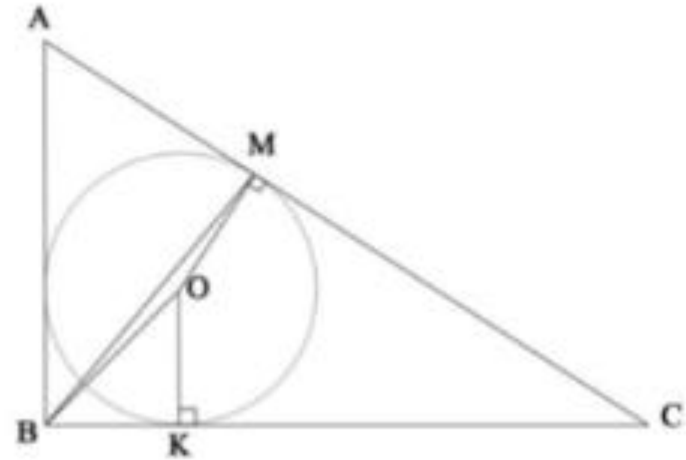
Ответ: 5.

*Задача 6

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, которая касается гипотенузы AC в точке M. Докажите, что отрезок BM меньше $3r$ – утроенного радиуса вписанной окружности и найдите длину BM, если это целое число, а $r = 0{,}8$.



Решение.

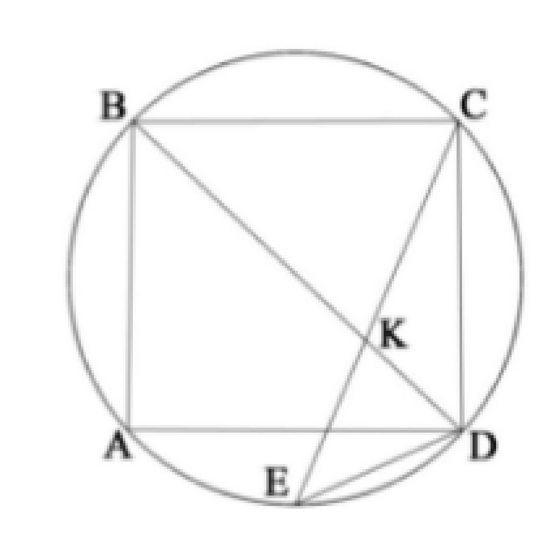


1) Пусть K – точка касания окружности и катета BC. Обозначим за $r = OK = OM$ радиус вписанной в треугольник ABC окружности.
2) Рассмотрим треугольник BOK. Так как центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис, то $\angle OBK = 45°$, откуда $BO = \frac{OK}{\sin 45°} = r\sqrt{2}$.
3) Рассмотрим треугольник BOM. Так как $BO = r\sqrt{2}$, $OM = r$, то по неравенству треугольника $BM < BO + OM = r\sqrt{2} + r < 3r$. Таким образом, первое утверждение задачи доказано.
4) В пункте 3 доказано неравенство $BM < r\sqrt{2} + r$. Так как $\sqrt{2} < 1{,}5$, то $BM < 2{,}5r = 2{,}5 \cdot 0{,}8 = 2$. Так как длина BM – целое положительное число меньше 2, то $BM = 1$.

Ответ: 1.

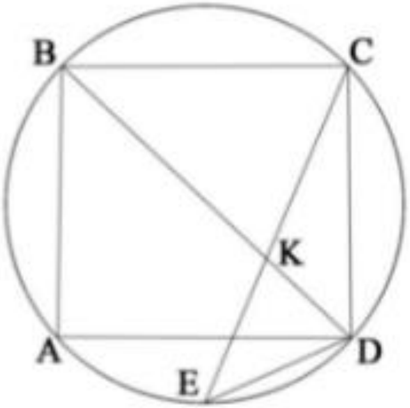
*Задача 7

Квадрат $ABCD$ со стороной a вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K. Найдите отношение BK к KE, если $\angle BKC = 60°$.



Решение.

1) Треугольники BCK и EDK подобны, так как $\angle BKC = \angle EKD = 60°$ (вертикальные) и $\angle CBK = \angle CED = 45°$ (опираются на одну дугу CD).



2) Из подобия треугольников BCK и KED следует $\frac{CK}{KD} = \frac{BK}{KE}$.

3) Отметим, что $\angle DCK = 180^{\circ} - \angle CKD - \angle CDK = 180^{\circ} - 120^{\circ} - 45^{\circ} = 15^{\circ}$.

4) Применив теорему синусов к треугольнику DCK, получаем $\frac{KD}{\sin 15°} = \frac{CK}{\sin 45°}$, откуда $\frac{CK}{KD} = \frac{\sin 45°}{\sin 15°}$.

5) Вспоминая, что $\frac{CK}{KD} = \frac{BK}{KE}$, получаем $\frac{BK}{KE} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin 15°}$.

Ответ: $\frac{BK}{KE} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin 15°}$.

Спасибо
за
внимание