Полезные приёмы для подготовки к ЕГЭ по математике

Куплинова Татьяна Владимировна,

учитель математики МБОУ лицея №1

г. Славянск-на-Кубани

ЕГЭ. Задание 8.

Чаще всего в вариантах ЕГЭ встречаются задачи на движение.

1. *Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость автомобилиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 4 часа позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.*

Что обозначить за x? Очевидно, скорость велосипедиста – ведь ее и надо найти. Автомобилист проезжает на 40 километров в час больше. Значит, скорость автомобилиста равна $x + 40$.

Нарисуем таблицу. Сразу внесем в нее расстояние. Из условия задачи известно, что и велосипедист, и автомобилист проехали по 50 км. Можно внести в таблицу скорость – она равна x и x+40 для велосипедиста и автомобилиста соответственно. Теперь заполним графу «время».

Найдем его по формуле: $t = \frac{S}{v}$. Для велосипедиста получим $t_1 = \frac{50}{x}$, для автомобилиста $t_2 = \frac{50}{x+40}$ и тоже запишем в таблицу.

Вот что получается:

	v, км/ч	**t, ч**	**S, км**
Автомобилист	x+40	$\frac{50}{x+40}$	50
Велосипедист	x	$\frac{50}{x}$	50

Остается записать, что велосипедист прибыл в конечный пункт на 4 часа позже автомобилиста. Позже – значит, времени он затратил больше. Это значит, что t_1 на четыре больше, чем t_2, то есть

$t_2+4=t_1$.

$$\frac{50}{x+40} + 4 = \frac{50}{x}$$

$$\frac{50}{x} - \frac{50}{x+40} = 4$$

Получаем

$$\frac{50(x+40) - 50x}{x(x+40)} = 4$$

$$\frac{50x + 2000 - 50x}{x(x+40)} = 4$$

$$\frac{2000}{x(x+40)} = 4$$

Разделим обе части нашего уравнения на 4 (или умножим на $\frac{1}{4}$). Очевидно, оно станет проще. Но почему-то многие учащиеся забывают это делать, и в результате получаются сложные уравнения и шестизначные числа в качестве дискриминанта.

$$\frac{500}{x(x+40)} = 1$$

Умножим обе части уравнения на $x(x+40)$. Получим:

$$x(x+40) = 500$$

Раскроем скобки и перенесем всё в левую часть:

$$x^2 + 40x - 500 = 0$$

Получили квадратное уравнение. Напомним, что квадратным называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$. Решается оно стандартно.

Сначала находим дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$, а затем корни по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

В нашем уравнении $a = 1$, $b = 40$, $c = -500$.

Найдем дискриминант D = 1600 + 2000 = 3600 и корни:

$x_1 = 10$, $x_2 = -50$.

А теперь лайфхак. *Этот приём можно использовать, числители одинаковы, в левой части уравнения стоит целое число.*

$\frac{50}{x} - \frac{50}{x+40} = 4$

Предположим, что x – это целое положительное число (*скорость автомобилиста)*. И что число $\frac{50}{x}$ и число $\frac{50}{x+40}$ то же целые. Выпишем все целые делители числа 50.

1·50=50 2·25=50 5·10=50.

Очевидно, что подходят делители **5** и **1.**

Значит, $\frac{50}{x} = 5$, $\frac{50}{x+40} = 1$. Пробираем корень уравнения x= 10.
Ответ: 10 км/ч.

Вот еще решения текстовой задачи:

2. Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 234 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Пусть x км/ч – скорость баржи на путь из A в B, тогда (x+4) км/ч – скорость баржи на обратном пути. Из формулы легко выразить время $t = \frac{s}{v}$.

Заполним таблицу.

	v, км/ч	***t, ч***	***S, км***
из A в B	x	$\frac{234}{x}$	234
из B в A	x + 4	$\frac{234}{x+4}$	234

Сразу поясним: здесь речь идет о времени, когда баржа находилась в движении. В условии задачи говорится, что на обратный путь баржа затратила столько же времени, сколько на путь из A в B. При этом 8 часов она стояла, а время, которое она плыла, равно $\frac{234}{x+4}$ часов.

Составим уравнение $\frac{234}{x} = \frac{234}{x+4} + 8$.

Соберем слагаемые, стоящие в левой части уравнения. $\frac{234}{x} - \frac{234}{x+4} = 8$.

Сократим обе части уравнения на 2.

$$\frac{117}{x} - \frac{117}{x+4} = 4.$$

А дальше лайфхак.

Допустим, что x – целое положительное число (*скорость баржи на пути из А в В*). И что числа $\frac{117}{x}$ и $\frac{117}{x+4}$ тоже целые. Найдем все целые делители числа 117.

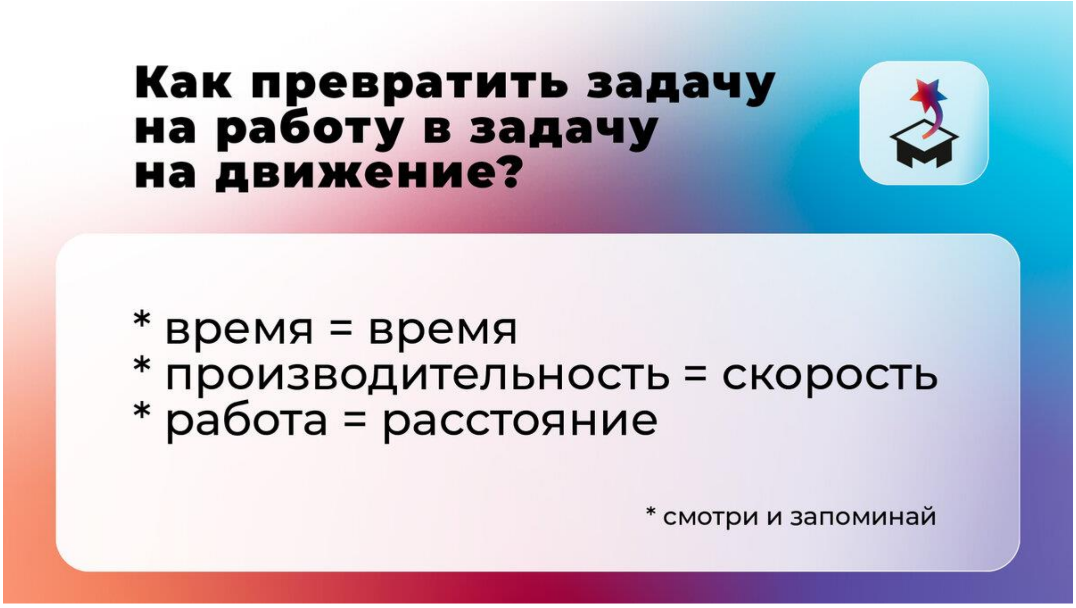
$1 \cdot 117 = 117$ $3 \cdot 39=117$ $=117$

Заметим, что $117=9 \cdot 13$ нам подходит, так как разность двух делителей 117 равна 4. Значит, $\frac{117}{x} = 13$, а $\frac{117}{x+4} = 9$. Подбираем целый корень уравнения x=9.

Замечание: *можно обе части уравнения помножать на 2, 3 и т.д., если у числителя дроби «мало» целых делителей, и трудно подобрать пары.*

Работа = движение

Одно из самых сложный заданий тестовой части по мнению выпускников – задание номер 8 на работу. Предлагаем еще один интересный способ, как превратить страшную задачу на работу в привычную задачу на движение.



Например:

Заказ на 145 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за 1 час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 1 деталь больше второго?

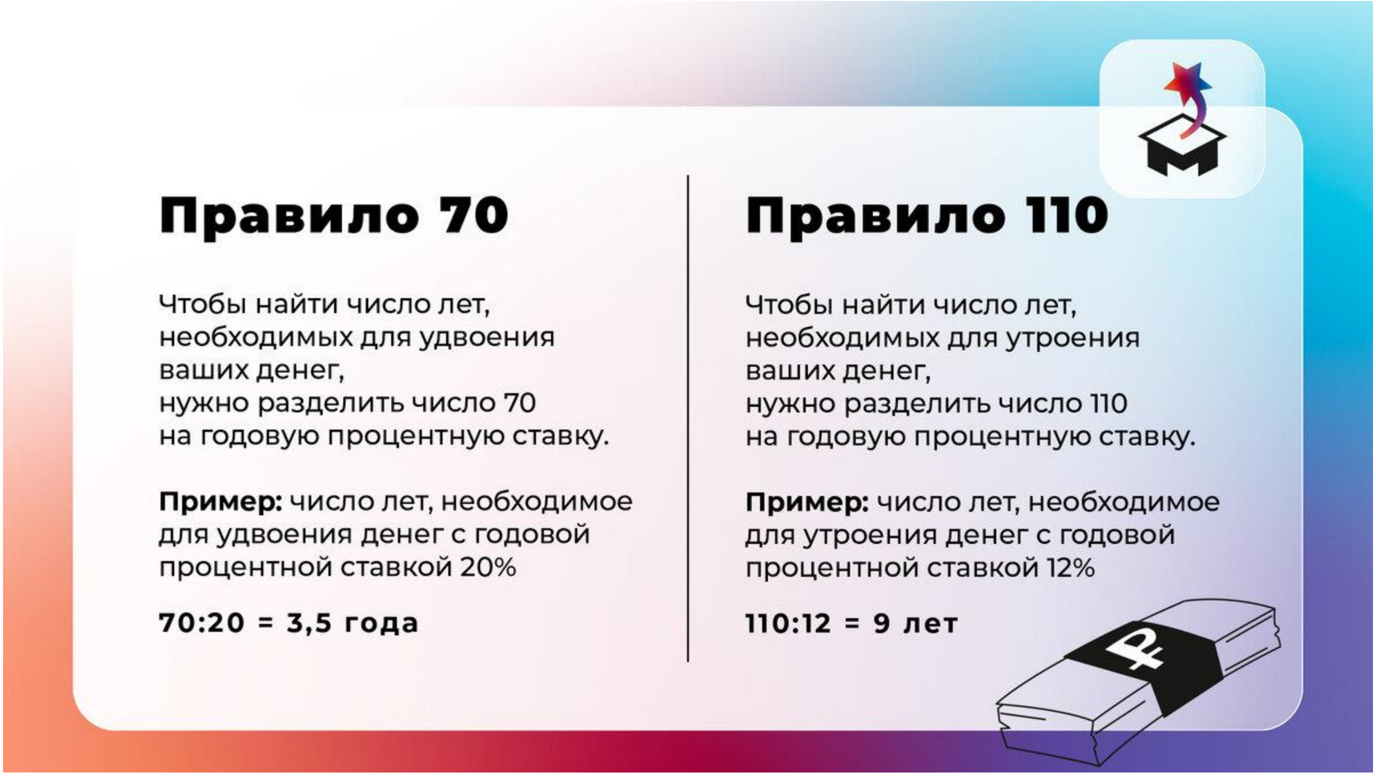
А теперь.

Путь в 145 километров первый автомобиль преодолевает на 1 час быстрее, чем второй. Сколько километров в час проезжает первый автомобиль, если известно, что он за час проезжает на 1 километр больше второго?

И совсем не страшно!

Правило 70 и Правило 110.

Эти правила могут пригодиться для 8 и даже 15 заданий экзамена.



Задачи на смеси и сплавы.

Конечно же можно решить данную задачу алгебраическим способом – этот способ надежный, но достаточно длинный и сложный. Им могут в основном воспользоваться только обучающиеся с достаточно развитым логическим мышлением. Лучше и проще для этого применить правило смешения диагональную модель «конверта Пирсона» или его также называют «правилом креста».

Для решения задач этого типа необходимо ввести следующие понятия:

а) концентрация растворенного вещества в растворе;

б) масса растворенного вещества в растворе;

в) масса раствора.

Если нам нужно приготовить раствор определенной концентрации, имея в распоряжении два раствора с более высокой и менее высокой концентрацией, чем нужно нам. Тогда, если обозначить массу первого раствора через – m_1, а второго – m_2, то при смешивании общая масса смеси будет слагаться из суммы этих масс – $m_1 + m_2$.

Пусть концентрация растворенного вещества в первом растворе –p_1, во втором – p_2, а в их смеси – p. Тогда общая масса растворенного вещества в смеси будет слагаться из масс растворенного вещества в исходных растворах:

I раствор	**II раствор**	**Смесь**
p_1%	p_2%	p%
m_1	m_2	$m_1 + m_2$

$m_1 * \frac{p_1}{100} + m_2 * \frac{p_2}{100} = \frac{p}{100} * (m_1 + m_2)$.

Умножим обе части уравнения на 100.

$m_1 * p_1 + m_2 * p_2 = p(m_1 + m_2)$.

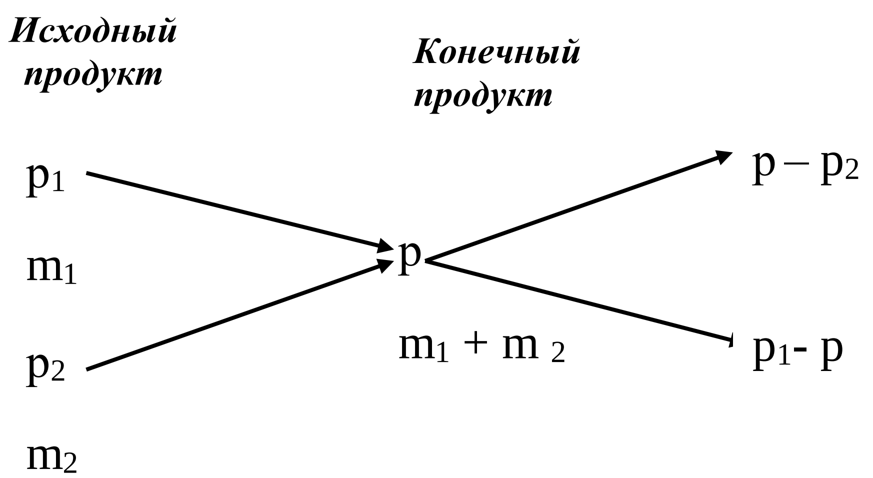
Отсюда

$m_1(p_1 – p) = m_2(p – p_2)$,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(p - p_2)}{(p_1 - p)}$$

Мы видим, что отношение массы первого раствора к массе второго раствора есть отношение разности концентраций растворенного вещества в смеси и во втором растворе *к разности соответствующих величин в первом растворе и в смеси.*

Схема для записи условия задачи



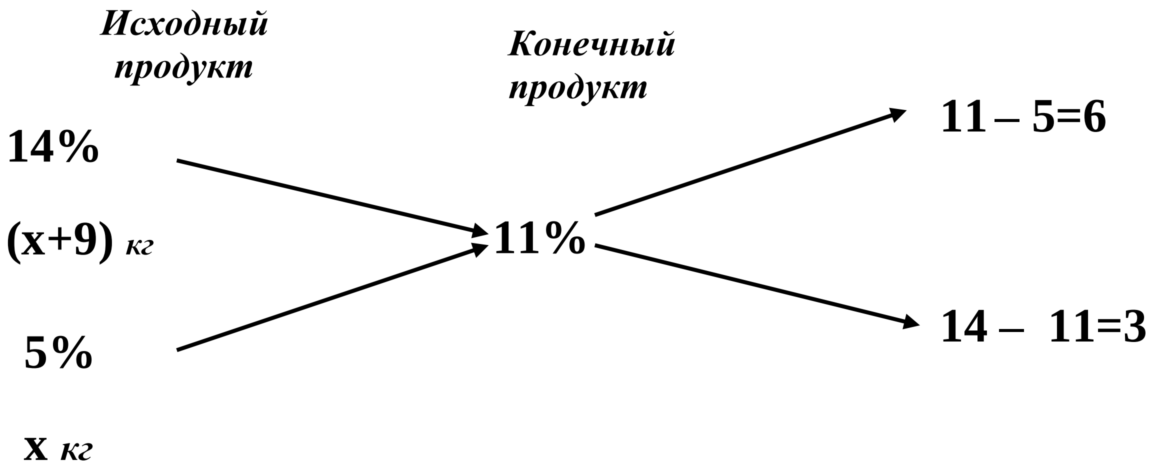
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(p - p_2)}{(p_1 - p)}$$

Для решения подобных задач применяется так называемый «конверт Пирсона» или, как привыкли называть его в народе, «правило креста».

Важно помнить, что данное правило можно использовать только относительно **массовых долей**, но ***не объемных.***

Рассмотрим несколько типов задач на смешивание растворов с использованием «правило креста».

1. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй – 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.



Составим уравнение

$$\frac{x+9}{x} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{x+9}{x} = \frac{2}{1}$$

$$x+9=2x$$

$$x=9$$

Ответ 9 кг.

Аналогичная задача, решенная алгебраическим способом.

2. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Традиционное решение. Пусть масса первого сплава m_1 кг, а масса второго – m_2 кг. Тогда массовое содержание меди в первом и втором сплавах $0,05m_1$ и $0,14m_2$,соответственно. Из этих двух сплавов получили третий сплав m_3 кг, содержащий 10% меди. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m_3, \\ 0,05m_1 + 0,14m_2 = 0,1 \cdot m_3, \\ m_2 - m_1 = 7, \end{cases} \Leftrightarrow$$

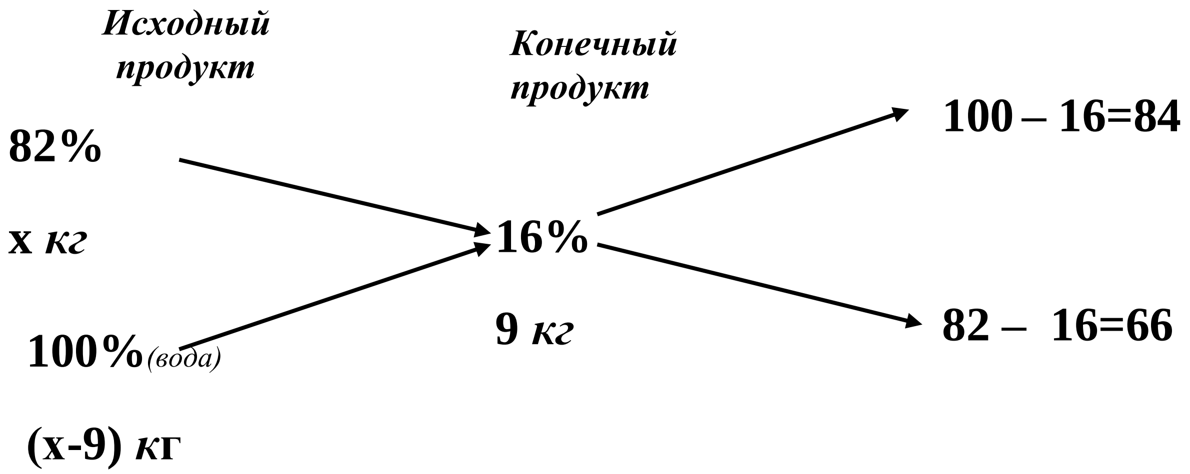
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = m_3 - m_2, \\ m_2 = 7 + m_1 \\ 0,05m_1 + 0,14(7 + m_1) = 0,1(7 + 2m_1), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 7 + m_1, \\ 0,01m_1 = 0,28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 28, \\ m_2 = 35. \end{cases}$$

Тогда масса третьего сплава равна: $28 + 35 = 63$ кг.

Ответ: 63.

3. Курага получается в процессе сушки абрикосов. Сколько килограммов абрикосов потребуется для получения 9 килограммов кураги, если абрикосы содержат 82 % воды, а курага содержит 16 % воды?



Составим уравнения

$$\frac{x}{x-9} = \frac{84}{66}$$

$$\frac{x}{x-9} = \frac{14}{11}$$

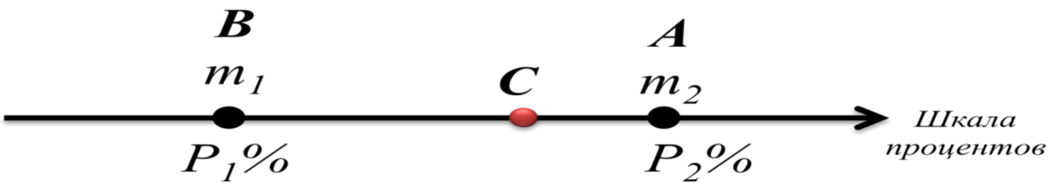
$$11x = 14x - 126$$

$$x = 42$$

Ответ 42 кг.

Ещё один способ решения задач, в которых смешиваются два вещества, позволяющий решать быстро, практически не задумываясь.

В чём суть метода? Если нам нужно приготовить раствор определенной концентрации, имея в распоряжении два раствора. У одного раствора процентное содержание – p_1 , а у другого – p_2. Тогда, если обозначить массу первого раствора через – m_1, а второго – m_2,. Отмечаем на «шкале процентов» процентное содержание p_1 и p_2.



И нужно понять, куда мы в итоге придем? Где будет смесь? Какое процентное содержание смеси? Найти на эти вопросы ответ помогут массы m_1, и m_2. У какого раствора масса больше, туда ближе мы окажемся. Если $m_1 > m_2$, то точка С (обозначение на шкале процентов процентного содержания смеси) будет ближе к m_2.

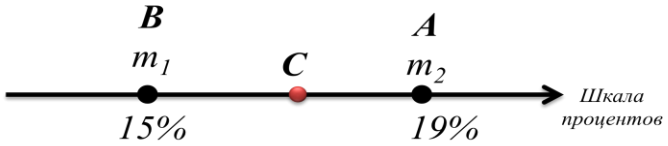
А насколько ближе? Ближе ровно ***во столько раз, во сколько раз отличаются массы.***

Если $m_1 : m_2 = 3:1$, то AC < BC в 3 раза.

Если $m_1 = m_2$, то AC = BC.

Вывод: *то во сколько раз итоговый процент (*процентного содержания смеси) *ближе к одному (p_1%), чем к другому (p_2%) – это в точности, то во сколько раз отличаются массы.*

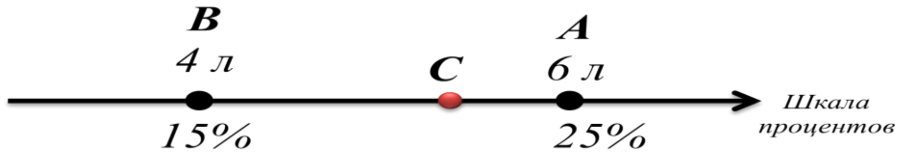
1. Смешали некоторое количество 15%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 19%-го раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?



Так по условию задачи $m_1, = m_2$, то AC=BC, то нужно найти точку, находящуюся от 15% и 19% на одинаковом расстоянии. Это 17%.

Ответ: *17% составляет концентрация получившегося раствора.*

2. Смешали 4 литра 15–процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25–процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?



Так по условию задачи $m_1, < m_2$, то BC>AC. Во сколько BC>AC?

$\frac{m2}{m1} = \frac{6}{4} - = \frac{3}{2}$ = 1,5

Нужно найти точку, которая делит отрезок AB в отношении 3 к 2.

25 – 15 = 10. Разделим 10 в отношении 3 к 2.

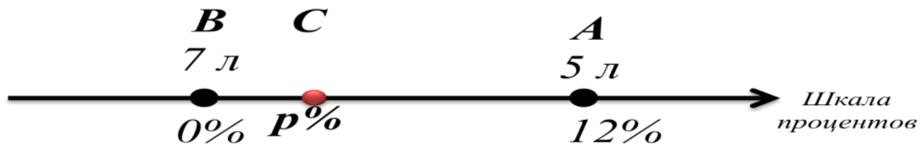
(10 : 5) * 2=4; 25 – 4= 21%

или

(10 : 5) * 3=6; 15+6 =21%

Ответ: *21%*

5. В сосуд, содержащий 5 литров 12–процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?



Так по условию задачи *5 < 7,* то AC>BC., т.е. ближе к 0% , к точке B.

Нужно найти такую C точку, которая делит отрезок AB в отношении 7 к 5.

7 + 5 = 12 частей

(12% –0 %) : 12 = 1 % приходится на 1 часть

5 * 1% =5%

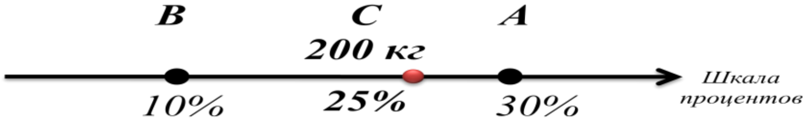
0%+ 5%=5%

или

7 * 1%=7%; 12 – 7 = 5%

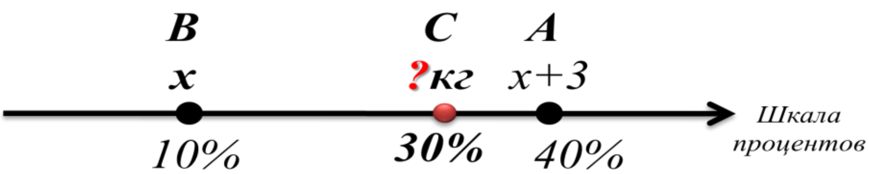
Ответ: *5%.*

4. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?



30% – 25%= 5%, длина АС=5
25% – 10%=15%, длина ВС=15
15 : 5 =3 : 1, значит, масса сплава 30% никеля> массы сплава 25% никеля в 3 раза.
3 + 1 = 4 частей всего
*(200 :4) * 1 =50 (кг) массы сплава 25% никеля*
*(200 :4) * 3 =150 (кг) массы сплава 25% никеля*
«На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?» – вопрос задачи.
150 – 50 = 100 (кг)
Ответ: *100 кг.*

5. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.



40% – 30%= 10%, длина АС=10
30% – 10%=20%, длина ВС=20
20 : 10 =2 : 1, значит, масса сплава 40% меди > массы сплава 10% меди в 2 раза,
т.е. (х+3)>х в 2 раза.
х+3 = 2х
х=3, значит, 3 кг – масса сплава 40% меди.
*х+ х+3=2х+3=2*3+3=9 (кг) массу третьего сплава*
Ответ: *9 кг.*

ЕГЭ. Задание 11.

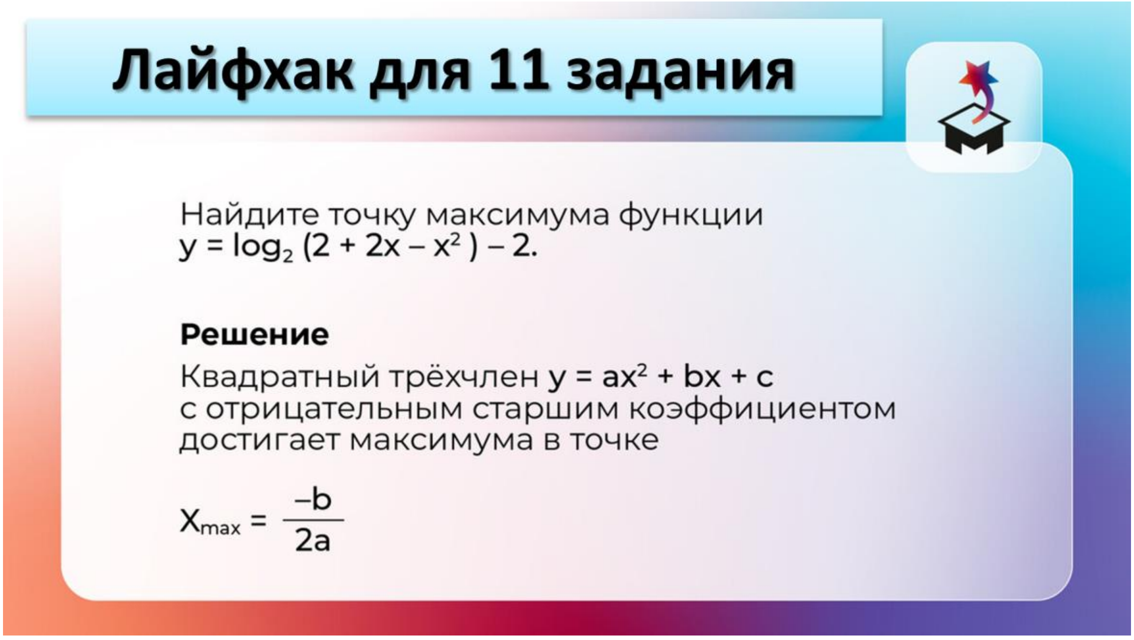
Правило матрешки

Иногда задание № 11 по нахождению производной бывает очень коварным: внутри одной функции прячется другая. Ученики часто не замечают этого и волшебным образом находят производную только одной из функций.

Важное замечание: в таких примерах внутренней функцией является любая функция, которой нет в таблице производных. Например, cos(x) – табличная функция, а cos(3x) – «матрешка», состоящая из двух функций – косинуса и 3x. Как раз для таких «матрешек» и существует одноименное правило. Нужно найти производные обеих функций и перемножить их между собой (смотрим картинку).

Продолжим разговор о «матрешках». Бывает так, что внутри функции спряталась не какая-нибудь, а именно квадратичная. Здесь предыдущее правило применить можно, но вы получите огромные вычисления, в которых легко запутаться.

Откроем маленький секрет: тут вообще не надо искать производную! Для нахождения точки максимума или минимума достаточно найти вершину параболы, которая задана квадратичной функцией (формула на картинке).



А если нужно найти наибольшее или наименьшее значение функции, то полученную абсциссу (х) – координату вершины нужно подставить в исходную функцию. Быстрый ответ готов! Только не забываем обращать внимание на направление ветвей параболы (коэффициент перед старшей степенью). Если ветви направлены вниз и в задании просят найти точку максимума, то все отлично. Также, как если ветви смотрят вверх и нужна точка минимума.

Наименьшее (наибольшее) значение функции во внутренней точке отрезка.

Следующие «секретные приёмы» возникли из-за того, что бланк ответов на ЕГЭ по математике можно вносить только целые числа или десятичные дроби.

1. Найдите наименьшее значение функции y=9x – ln (9x) + 3 на отрезке $[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}]$.

Очевидно, что нужно воспользоваться свойством логарифма: ln1 =0.

Тогда $9x = 1$

$x = \frac{1}{9}$

$x = \frac{1 \cdot 2}{9 \cdot 2}$

$x = \frac{2}{18}$; $\frac{2}{18} \in \left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$

$y(\frac{1}{9}) = 9 * \frac{1}{9} - \ln(9 * \frac{1}{9}) + 3 = 1 + 0 + 3 = 4$

Ответ: 4.

2. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2 e^{-4-x}$ *на отрезке* [–6; – 1].

Легко догадаться, что следует воспользоваться свойством степени $e^0=1$.

Тогда $-4 - x = 0$

$x = -4$; $-4 \in [-6; -1]$

$y(-4) = (-4+6)^2 e^{-4-(-4)} = 2^2 * 1 = 4.$

Ответ: 4.

3. *Найдите наибольшее значение функции* $y=(x+10)^2 \cdot (x+1)+3$ *на отрезке* [–20; –7].

$(x+1)<0$ при $x \in [-20; -7]$

$(x+10)^2 \geq 0$, значит, наибольшее значение данная функция достигает только при условии

$(x+10)^2=0 \Rightarrow x = -10;\ -10 \in [-20; -7]$

$y(-10)=(-10+10)^2 \cdot (-10+1)+3=3$

Ответ: 3.

4. *Найдите наименьшее значение функции* $y=(x-10)^2 \cdot (x+10)-7$ *на отрезке* [8; 18].

$(x+10)>0$ при $x \in [8; 18]$

$(x-10)^2 \geq 0$, значит, наименьшее значение данная функция достигает только при условии

$(x-10)^2=0 \Rightarrow x = 10;\ 10 \in [8; 18]$

$y(10)=(10-10)^2 \cdot (10+10)-7= -7$

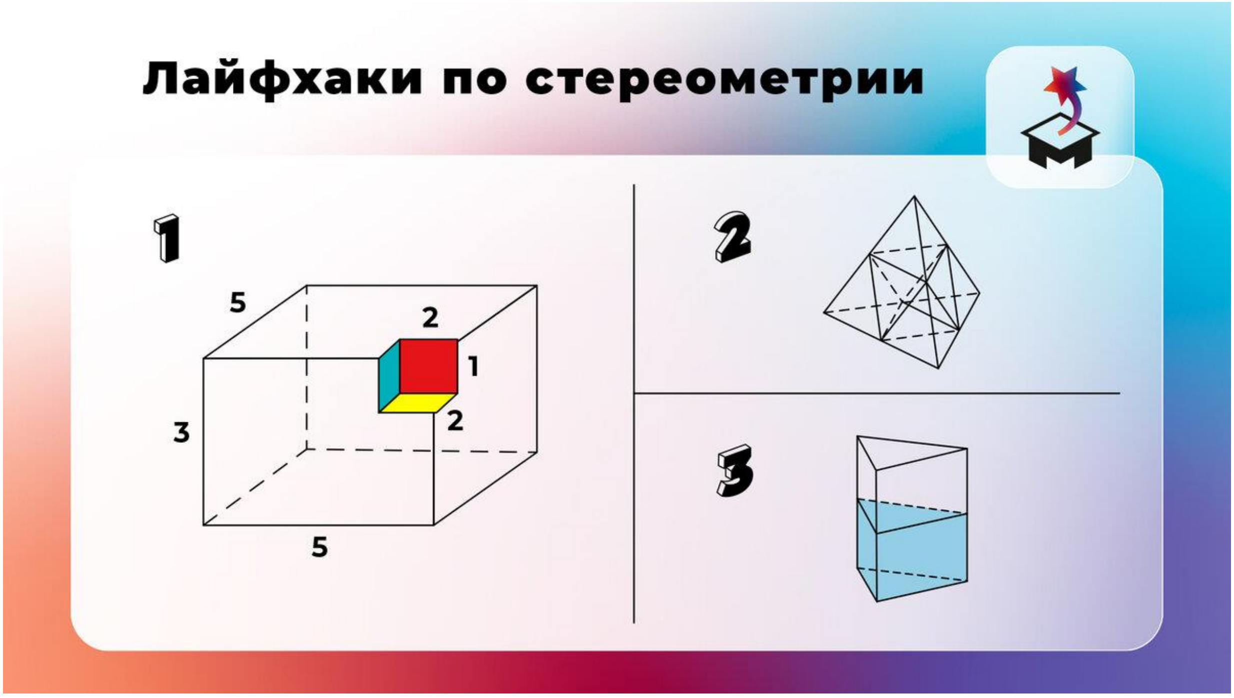
Ответ: –7.

ЕГЭ. Задание 5.

1. Площадь поверхности.

Посмотрите на рисунок №1. Казалось бы, все просто: ищи себе потихоньку площади всех граней, которые только есть, и складывай. Вот именно: потихоньку! Но на ЕГЭ времени не так много, как кажется, и тестовую часть в идеале нужно решать за 20 минут. Поэтому предлагаем быстрый прием поиска площади некоторых многогранников.

В данной задаче достаточно заметить, что красный, голубой и желтый квадраты дополняют площади передней, боковой и верхней граней параллелепипеда. Можно просто найти площадь поверхности параллелепипеда, это и будет верным ответом. А главное - быстрым решением.



2. Объем данного многогранника. Посмотрите на рисунок №2.

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра. Объем тетраэдра равен 19.

Решение: *объем данного многогранника равен разности объемов исходного тетраэдра и четырех тетраэдров, одни из вершин которого совпадают с вершинами исходного.*

Предлагаем **ПРОСТОЕ** решение: *в такой задаче, каким бы ни был объем тетраэдра, нужно разделить данное число на 2.*

19:2=9,5

Ответ: 9,5

3. Объём детали. Посмотрите на рисунок №3.

Очень просто: объем детали равен объему вытесняемой жидкости.

Как решить? Перемножить объем воды на отношение *разница между отметками/начальная высота*

$$\boxed{V_{детали} = V_{воды} \cdot \frac{\text{разница между отметками}}{\text{начальная высота}}}$$

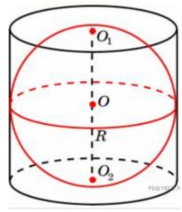
В сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3.

Решение.

$V_{детали} = V_{воды} \cdot \frac{\text{разница между отметками}}{\text{начальная высота}}$; $V_{детали} = 2000 \cdot \frac{9}{12} = 1500$ см^3.

Ответ: 1500.

4. Объём шара, вписанного в цилиндр.



Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 72. Найдите объем шара.

Решение.

$V_{шара} = \frac{2}{3} \cdot 72 = 48.$

$$\boxed{V_{шар} = \frac{2}{3} \cdot V_{цилиндра}}$$

Ответ: 48.

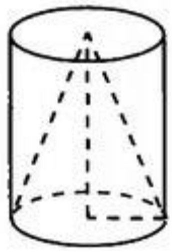
Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 62. Найдите объем цилиндра.

Решение.

$V_{цилиндра} = \frac{3}{2} \cdot 62 = 93.$

Ответ: 93.

5. Объём конуса, вписанного в цилиндр.



Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 17.

Решение.

Поскольку они имеют общее основание и высоту, то

$$\boxed{V_{цилиндра} = 3 \cdot V_{конуса}}$$

$V_{цилиндра} = 3 \cdot 17 = 51.$

Ответ: 51.

Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Объём цилиндра равен 120. Найдите объём конуса.

Решение.

Поскольку они имеют общее основание и высоту, то

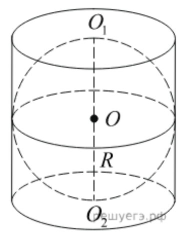
$$\boxed{V_{конуса} = \frac{1}{3} \cdot V_{цилиндра}}$$

$V_{конуса} = \frac{1}{3} \cdot 120 = 40$

Ответ: 40.

5. Площадь поверхности шара, вписанного в цилиндр.

Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 48. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Решение.

$$\boxed{S_{\text{площадь полной поверхности цилиндра}} = 1{,}5 \cdot S_{\text{площади вписанной в него сферы}}}$$

$S_{\text{площадь полной поверхности цилиндра}} = 1{,}5 \cdot 48 = 72.$

Ответ: 72.

Около шара описан цилиндр площадь полной поверхности которого равна 12. Найдите площадь поверхности шара.

Решение.

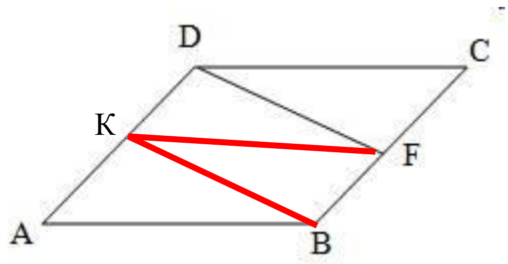
$$\boxed{S_{\text{площади вписанной в него сферы}} = \frac{2}{3} \cdot S_{\text{площадь полной поверхности цилиндра}}}$$

$S_{\text{площади вписанной в него сферы}} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8.$

Ответ: 8.

ЕГЭ. Задание 3.

Площадь параллелограмма ABCD равна 92. Точка F - середина стороны BC. Найдите площадь трапеции ADFB.



Решение. Так как точка F – середина BC, то треугольник DCF занимает ровно четверть всей площади параллелограмма. Следовательно, площадь треугольника DCF = 92:4. Тогда оставшаяся площадь, площадь трапеции ADFB, равна

$$S_{ADFB} = S_{ABCD} - S_{DCF}$$

$$S_{ADFB} = 92 - \frac{92}{4} = 92 - 23 = 69$$

Ответ: 69.