



ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ» КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Учебно-методическое пособие



**ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ**

**КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ
И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ
РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ
В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ**

Учебно-методическое пособие

Краснодар, 2023

УДК 372.851
ББК 74.262.21я7
М 54

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
ГБОУ ИРО Краснодарского края
(протокол № 2 от 28.06.2023 г.)*

Рецензенты:

Овчаренко Наиля Рауфовна, учитель математики МАОУ Лицей № 4,
г. Краснодара, Заслуженный учитель России.

Задорожная Ольга Владимировна, доцент кафедры математики,
информатики и технологического
образования ГБОУ ИРО Краснодарского
края, к.п.н.

**Методика обучения решению задач с параметрами в основной школе:
учебно-методическое пособие** / Власова А.А., Барышенский Д.С. –
Краснодар, ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2023. (План ИРО, п.107). – 96 с.

В учебно-методическом пособии рассматривается одна из сложных тем элементарной математики – «Задачи с параметрами». Все задания классифицированы по типам и методам решения, сопровождаются теоретическим материалом и методическими рекомендациями.

Представленное пособие полезно при подготовке школьников к ОГЭ и ЕГЭ по математике. Материалы могут быть основой программы элективного курса или курса внеурочной деятельности для классов с углубленным изучением математики.

Данное пособие адресовано учителям математики, обучающимся образовательных школ, лицеев, гимназий.

©ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2023
© Власова А.А., Барышенский Д.С., 2023

Оглавление

Введение.....	4
Технология обучения решению задач с параметрами.....	6
Методические рекомендации и практический материал к теме "Решение задач с параметрами" в контексте программы по математике для 5-9 классов.....	15
5-6 класс. Пропедевтика.....	15
Тема "Натуральные числа".....	15
Тема "Числовые и буквенные выражения".....	16
Тема "Решение линейных уравнений".....	16
Тема "Площади и объемы".....	17
6 класс.....	18
Тема "Положительные и отрицательные числа".....	18
Тема "Решение уравнений".....	18
7 класс.....	21
Линейные уравнения с параметрами.....	21
8 класс.....	36
Уравнения с параметрами, приводимые к линейным.....	36
Линейные неравенства с параметрами.....	50
Квадратные уравнения параметрам.....	58
9 класс.....	75
Квадратичная функция и ее график.....	75
Квадратные неравенства.....	77
Расположение корней квадратного трехчлена на числовой оси.....	83
Уравнения с одной переменной.....	91
Заключение.....	93
Литература.....	95

Введение

Мыслить человек начинает, когда у него появляется потребность что-то понять. Мышление обычно начинается с проблемы или вопроса, с удивления или недоумения, с противоречия.

Знания в значительной своей части не передаются учащимся в готовом виде, а приобретаются или в процессе самостоятельной познавательной деятельности в условиях проблемной ситуации.

Проблемное обучение заключается в создании перед учащимися проблемных ситуаций, осознании, принятии и разрешении этих ситуаций в процессе совместной деятельности учащихся и учителя при максимальной самостоятельности первых и под общим руководством последнего, направляющего деятельность учащихся.

Проблемное обучение способствует реализации двух целей:

- 1) сформировать у учащихся необходимую систему знаний, умений, навыков;
- 2) сформировать особый стиль умственной деятельности, исследовательскую активность и самостоятельность учащихся.

Проблемная ситуация характеризует определенное психологическое состояние учащегося, возникающее в процессе выполнения задания, для которого нет готовых средств и которое требует усвоения новых знаний о предмете, способах или условиях выполнения задания.

Для создания проблемной ситуации перед учащимися должно быть поставлено такое практическое или теоретическое задание, при выполнении которого они должны открыть подлежащие усвоению новые знания. Задание основывается на тех знаниях и умениях, которыми владеют ученики. Неизвестное, которое нужно открыть, составляет подлежащую усвоению общую закономерность, общий способ действия или некоторые общие условия выполнения действия. Следует учесть, что ни слишком трудное, ни слишком

легкое задание не вызовет проблемной ситуации, поэтому предлагаемое задание должно соответствовать интеллектуальным возможностям учащихся.

Принято различать четыре основных звена процесса проблемного обучения:

- осознание общей проблемной ситуации;
- анализ ее, формулировка конкретной проблемы;
- решение проблемы (выдвижение, обоснование гипотез, последовательная проверка их);
- проверка правильности решения проблемы.

Безусловно, проблемный метод нельзя превращать в универсальный метод обучения. Для некоторых учащихся он несколько труден. Да и времени он требует больше, чем традиционное информационно-сообщающее изложение. Поэтому проблемный метод следует использовать дозированно, если уверены в успехе его применения.

Технология обучения решению задач с параметрами

Известно, что в программах по математике задачам с параметрами отводится незначительное место. Поэтому, в первую очередь, укажем разделы общеобразовательной математики, в которых вообще присутствует сама идея параметра:

Функция прямая пропорциональность: $y=kx$

(x , y -переменные, k -параметр, $k \neq 0$)

Линейная функция: $y=kx+b$

(x и y -переменные, k и b -параметры)

Линейное уравнение: $ax+b=0$

(x -переменная, a и b -параметры)

Уравнение первой степени: $ax+b=0$

(x -переменная, a и b -параметры, $a \neq 0$)

Линейное неравенство

Квадратное уравнение: $ax^2+bx+c=0$

(x -переменная, a , b , c -параметры, $a \neq 0$)

Квадратичная функция: $y=ax^2+bx+c$

(x и y -переменные, a , b , c -параметры)

Квадратные неравенства

В содержание каждой названной темы включается блок материала, связанный с параметром.

При методической разработке этого блока выделяются следующие шаги:

- 1) Изучение программы и учет "требований жизни".
- 2) Анализ учебного материала.
- 3) Методы решения и составления задач по теме.
- 4) Выбор алгоритмов решения типовых задач.

В первую очередь следует определить вопросы теории, знания и умения, которые должны быть сформированы у всех учеников; число часов, отводимое на изучение темы.

Успех работы над темой во многом зависит от того, как удастся учесть "требования жизни". В любом классе имеется значительное число учащихся, которые готовятся поступать в высшие учебные заведения, где требуется серьезная математическая подготовка.

При отборе материала учитывается подготовка учащихся класса, результаты работы по предыдущим темам. На основе этого учитель определяет материал для повторения.

Затем необходимо уточнить затраты времени на изучение темы в целом и по отдельным урокам, определить содержание материала предстоящей лекции.

Весь материал рассортировывается. Главная часть-тот материал, который будет изучаться на уроках, далее-материал для занятий факультатива, индивидуальных заданий, специальный материал для работы со старшеклассниками.

Под "главным содержанием" понимается та часть материала, без усвоения которой не могут быть решены задачи изучения темы.

Определив главное, надо выбрать психологически правильную линию поведения, которая заставит ребят самостоятельно определить метод решения, установить особенности задачи, систематизировать материал.

Далее можно приступить к прогнозированию затруднений учащихся и возможных типичных ошибок.

Для выявления затруднений учащихся желательно изучить требования к учащимся к овладению общеучебными умениями. Это позволяет:

- а) выявить навыки учебного труда, которые не сформированы у учащихся, но им необходимы;
- б) установить, какие из общеучебных умений можно продолжить формировать при работе над темой;

в) определить наличие в системе упражнений задания для формирования общеучебных умений;

г) спрогнозировать возможность самостоятельного изучения отдельных частей материала.

На следующем шаге методической разработки важно повторить и систематизировать методы решения задач по этой теме. Для этого требуется:

а) выделить типы задач;

б) определить методы решения этих задач;

в) продумать методику знакомства учащихся с избранными методами решения.

При решении задач с параметрами преимущественно применяются два метода: графический и аналитический.

При выделении методов решения задач по теме следует помнить, что сложная задача чаще всего имеет единственный метод решения.

Важна работа и по составлению задач. Методы составления задач могут быть такими:

1. Конструкция примера сохраняется, но вносятся изменения в числовые данные или в требование задачи, либо одновременно.

Пример: 1) Исходное задание.

При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (3a - 1)|x| + 2a^2 - a = 0$ имеет четыре различных решения?

$$|x^2| - (3a - 1)|x| + 2a^2 - a = 0,$$

$$\begin{cases} |x| = 2a - 1 \\ |x| = a \end{cases}.$$

Для того чтобы исходное уравнение имело четыре решения, необходимо, чтобы каждое уравнение совокупности имело два различных решения, и они не совпадали.

$$\begin{cases} a > 0 \\ 2a - 1 > 0 \\ a \neq 2a - 1 \end{cases} \begin{cases} a > 0 \\ a > \frac{1}{2} \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

2) Изменим задание.

При каких значениях параметра b уравнение $x^2 - (4b - 2)|x| + 3b^2 - 2b = 0$ имеет два различных решения?

$$|x^2| - (4b - 2)|x| + 3b^2 - 2b = 0$$

$$|x^2| - (3b - 2 + b)|x| + (3b - 2)b = 0 \quad \begin{cases} |x| = 3b - 2 \\ |x| = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} b < 0, \\ 3b - 2 > 0; \end{cases} & \begin{cases} b < 0, \\ b > \frac{2}{3}; \end{cases} & \begin{cases} b \neq 0 \\ 0 < b < \frac{2}{3} \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b > 0 \\ 3b - 2 < 0 \end{cases} & \begin{cases} b > 0 \\ b < \frac{2}{3} \end{cases} & \\ b = 3b - 2 > 0 & b > 1 > 0 & \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \{1\}$.

2. В известных примерах числовые данные заменяются параметрами.

Пример: В исходном примере: решить уравнение $[x] = 2$ - выделяется число 2, которое может быть заменено параметром. Получим: $[x] = a$. Решение последнего уравнения содержит элементы исследования, так как нужно учесть условие $a \in \mathbb{Z}$, вспомнив определение целой части.

3. Составление уравнения, решаемого тем же приемом, что и исходное:

Пример: Исходное уравнение: $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$ (1)

1) Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно a .

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0;$$

$$a^2 - 2(x^2 - 1)a + x^4 - 6x^2 + 4x = 0;$$

$$a_{1,2} = x^2 - 1 \pm \sqrt{4x^4 - 2x^2 + 1} - x^4 + 6x^2 - 4x;$$

$$a_{1,2} = x^2 - 1 \pm \sqrt{4x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$a_{1,2} = x^2 - 1 \pm (2x - 1)$$

(2) Таким образом, уравнение (1) распадается на два квадратных уравнения относительно x :

$$x^2 + 2x - a - 2 = 0 \qquad x^2 - 2x - a = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a+3} \qquad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{a+1}$$

Ответ:

при $a < -3$ корней нет;

при $a = -3$ $x = -1$;

при $-3 < a < -1$ $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a+3}$;

при $a = -1$ $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1$;

при $a > -1$ $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a+3}$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{a+1}$

2) Рассматривая этапы решений уравнения (1) с конца, видно, что следует начинать с составления выражения вида (2):

$$b_{1,2} = x^2 + 2 \pm (3x - 1).$$

Далее запишем два квадратных уравнения с параметром b :

$$x^2 + 3x - b + 1 = 0; \qquad x^2 - 3x - b + 3 = 0.$$

Перемножив левые части этих уравнений, получим уравнение четвертой степени относительно x :

$$x^4 - (5 + 2b)x^2 + 6x + b^2 - 4b + 3 = 0,$$

$$(x^2 - b)^2 - 5x^2 + 6x - 4b + 3 = 0.$$

Решается так же, как уравнение (1).

4. Составление задач, обратных данным.

Пример 1.

1) Дано уравнение первой степени $5x - 2a = ax - 3$.

Требуется определить область изменения параметра a , если данное уравнение имеет решение: $2 < x < 8$.

Ответ: $3,25 < a < 4,3$.

2) (Обратная задача). В уравнении $5x - 2a = ax - 3$ параметр a изменяется на промежутке $3,25 < a < 4,3$. Определить соответствующую область изменения значений корня.

Пример 2.

1) Пусть решена следующая задача на неравенства:

В каком промежутке должно изменяться число a , чтобы оба корня уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \text{ были заключены между } -2 \text{ и } 4 ?$$

Ответ: $-3 < a < 5$.

2) (Обратная задача). Дано уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$. В каких пределах будут изменяться корни уравнения, если параметр a изменяется в пределах

$$-3 < a < 5 ?$$

Умение решать прямую и обратную задачи является важным критерием достигнутой учеником глубины понимания изучаемого раздела математики, развития творческого мышления, одним из путей саморазвития ума учащихся.

При выборе метода следует продумать такие моменты:

1. Идея метода.
2. Выбор примера для первого знакомства.
3. Способ выполнения анализа условия с целью определения метода решения.
4. Возможности самоконтроля.
5. Методы усложнения заданий.

6. Подготовка банка заданий.

7. Стереотипы мышления, которые мешают при реализации метода и способы их преодоления.

Когда закончена методическая разработка темы, следует переходить к составлению лекции для учащихся. Очевидны следующие требования к школьной лекции:

1. Лекция должна быть интересной для учащихся и для учителя.

2. Научный уровень лекции должен соответствовать уровню развития учащихся класса.

3. Лекция должна быть обучающей, развивающей и воспитывающей.

4. Тема лекции должна естественным образом вытекать из ранее изученного и прокладывать тропинку к последующему.

5. Лекция должна быть совместным делом учащихся и учителя.

6. Лекция должна быть емкой, целостной, размерной, ритмичной, обстоятельной.

7. Главные мысли должны быть повторены несколько раз, выписаны аккуратно на доске и законспектированы учениками.

Специальные графические средства (подчеркивание, выделение) помогают представить конспектируемый материал в наиболее запоминающейся форме.

Основная часть лекции сопровождается вопросами к классу "А как вы думаете?" и т.п. Такие вопросы стимулируют учащихся к активной работе на лекции, помогают им не "выключаться" из процесса познания.

Одно из главных правил-на лекции должны быть вопросы, т.к. способность задавать вопросы является верным признаком активной мыслительной деятельности.

Для урока решения ключевых задач выбираются задачи, соответствующие следующим критериям:

1. Соответствие данной теме.

2. Степень использования при изучении последующих тем.

3. Затраты времени по обучению учащихся решению задач.
4. Оптимальность алгоритмов решения задач.
5. Возможность поразить учащихся красотой решения.

Способ выделения ключевых задач основан либо на умениях, которые должны быть сформированы у учеников после изучения темы, либо на методах решения задач по изучаемой теме.

При определении последовательности ключевых задач учитываются следующие рекомендации:

1. Начинать лучше всего с самых простых ключевых задач.
2. Те ключевые задачи, которые связаны с предыдущей темой, включать в число первых, а используемые в последующих темах разбирать позднее.
3. Самые красивые задачи отнести на вторую часть урока.
4. Чередовать задачи, требующие обширных записей, с теми, которые не требуют громоздких обоснований.

При разборе решений ключевых задач лучше обратиться к лекции. "Размышляя вслух", учитель знакомит ребят с логическими приемами, на основе которых выбирается тот или иной подход к решению. Для того, чтобы убедиться, что учащиеся поняли, можно обратиться к конкретному ученику с предложением рассказать решение ключевой задачи.

К основным задачам урока решения обучающих задач можно отнести:

1. Ознакомление школьников с решениями задач, сводящихся к решению ключевых;
2. Систематизацию методов решения задач по теме;
3. Обучение решению задач по теме в ходе специальных упражнений.

В планируемой системе обучающих задач должны быть представлены:

1. Задачи на распознавание (т.е. задачи, в которых следует распознать ту или иную ключевую задачу);
2. Задачи на реализацию методов;
3. Задачи на применение (в них отрабатываемая задача служит вспомогательной при решении другой задачи).

Успех урока зависит от таких факторов: соответствует ли система обучающих задач особенностям класса; правильно ли организована работа по систематизации; известны ли затруднения учеников.

В связи с тем, что программой не отведено специальное время на решение задач с параметрами, практикуются долгосрочные домашние задания. Обычно срок выполнения – 7-10 дней. По окончании этого срока на стенде в кабинете вывешивается решение предложенных задач, на текущем уроке делается краткий анализ домашнего задания, назначаются консультанты. Тема развивается по спирали, пронизывая программный материал, поэтому задачи с параметрами включаются либо последним номером в текущую самостоятельную или контрольную работу, либо как дополнительная задача. В течение года учащимся предлагается выполнить несколько проверочных работ, проверяющих навыки решения ключевых задач, а также домашняя контрольная работа, в которую уже включены задачи разной степени сложности. В конце года проводится итоговая контрольная работа

Методические рекомендации и практический материал к теме "Решение задач с параметрами" в контексте программы по математике для 5-9 классов

5-6 класс. Пропедевтика

Несмотря на то, что в обучении математики в 5-6 классах встречаются буквенные выражения с одной или несколькими буквами (в частности, в вычислениях по формулам, при записи свойств арифметических действий), в упражнениях, направленных на отработку навыков преобразования буквенных выражений, решения уравнений и т.п., как правило, рассматриваются выражения лишь с одной буквой. Поэтому в самом начале знакомства с параметром (термин дается без определения; записывается на доске и в тетрадях учащихся, включается в словарную работу) у учеников возникает некий психологический барьер, который обусловлен противоречивыми характеристиками параметра. С одной стороны, параметр в уравнении, неравенстве, следует считать величиной известной, а с другой-конкретное значение параметра неизвестно. С одной стороны, параметр является величиной постоянной, а с другой-он может принимать различные значения. Получается, что параметр в уравнении-это неизвестная известная, переменная постоянная величина. Этот "каламбур" очень точно отражает существо тех сложностей, которые нужно преодолеть ученикам. Учитель должен не спеша, скрупулезно и обязательно доброжелательно разъяснить младшим школьникам такой сложный вопрос, обильно сопровождая его различными примерами.

Целесообразно включать как в устные, так и в письменные упражнения задачи такого содержания:

5 класс

Тема "Натуральные числа"

Сравните a и $a+3$.

Известно, что $a > b$. Расположите в порядке возрастания числа:

$a+8$, $b-4$, $a+3$, a , $b-1$, b .

Зная, что $a > b$, сравните числа:

- а) $5 + a$ и b ;
- б) $b - 8$ и a ;
- в) $12a$ и $10b$;
- г) $6a$ и b .

Очевидно, что данные задания решаются учениками 5 класса интуитивно, так как им не известны свойства неравенств, однако они развивают абстрактное мышление, столь необходимое математику.

Можно попросить проиллюстрировать свое утверждение на конкретных значениях a и b .

Тема "Числовые и буквенные выражения"

1. В каждом ряду зрительного зала m мест, а число рядов на n больше, чем мест в ряду. Сколько мест в зрительном зале?

2. В составе пассажирского поезда 3 мягких вагона и 14 купейных вагонов. В каждом мягком вагоне p мест, а в купейном на q мест больше. Сколько всего мест в таком составе поезда?

3. Запишите число, в котором:

- а) 8 десятков и x единиц;
- б) x десятков и 8 единиц;
- в) x десятков и y единиц;
- г) 5 сотен, x десятков и 4 единицы;
- д) x сотен, y десятков, z единиц.

Тема "Решение линейных уравнений"

1. При каких значениях a число 5 является корнем уравнения:

- а) $ax = 7$;
- б) $2x = 3a$;
- в) $(8 - a) \cdot x = 5 \cdot x$.

2. Какое из двух чисел, обозначенных буквами, больше?

Сравнивая числа в каждом уравнении, докажите, на сколько или во сколько раз больше или меньше:

а) $a + k = b$;

б) $x = y : 2$;

в) $c - k = 8 - 2$;

г) $3 + x = 5 + 2$;

д) $m \cdot 3 = n$;

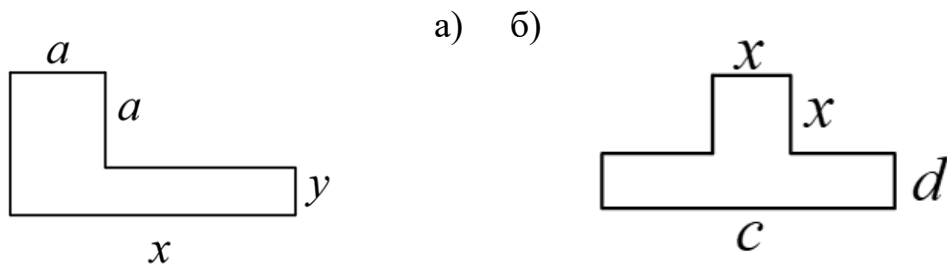
е) с.

3. Может ли при каком-нибудь значении a быть верным равенство:

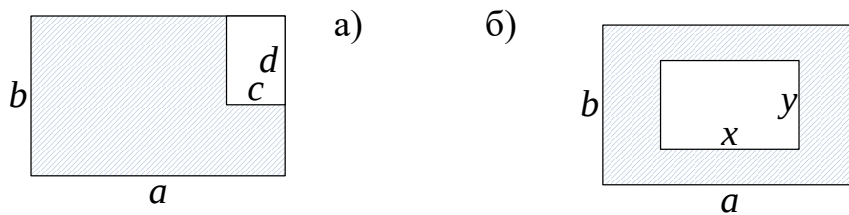
$$a + 1 = a - 1?$$

Тема "Площади и объемы"

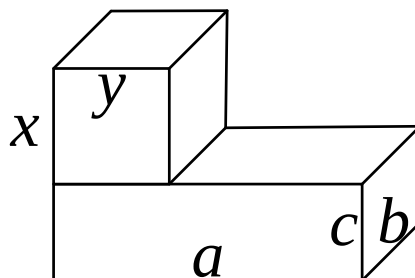
1. Составьте формулы для вычисления площадей фигур:



2. Составьте формулу для вычисления площади заштрихованной части фигуры:



3. Запишите формулу для вычисления объёма фигуры:



6 класс

Тема "Положительные и отрицательные числа"

1. Зная, что $a > b$, сравните числа:

а) $-a$ и $8 - b$; б) $-(a - 4)$ и $-b$.

2. Известно, что $a > b > 0$. Сравните:

а) $-15a$ и $8b$; б) $-3a$ и $-2b$.

3. Положительным или отрицательным числом является значение выражения

$4k - mn$, где m и n -отрицательные числа?

4. Сравнить: а) $-a$ и $3a$.

Решение: Следует рассмотреть три случая:

Если $a < 0$, то $-a > 3a$.

Если $a = 0$, то $-a = 3a$, ($0 = 3 \cdot 0$; $0 = 0$).

Если $a > 0$, то $-a < 3a$.

б) a и $\frac{1}{2}a$.

Решение: 1) Если $a < 0$, то $a < \frac{1}{2}a$.

Если $a = 0$, то $a = \frac{1}{2}a$, ($0 = \frac{1}{2} \cdot 0$; $0 = 0$).

Если $a > 0$, то $a > \frac{1}{2}a$.

При решении задач такого рода желательно иллюстрировать рассуждения на координатной прямой.

Тема "Решение уравнений"

1. При каких значениях k уравнение $k \cdot z = 8$:

а) имеет корень, равный $-4, \frac{1}{7}, 0$;

б) не имеет корней;

в) имеет отрицательный корень?

2. Определите, при каких значениях b число 3 является корнем уравнения:

а) $(5+b) \cdot x = 7+3b$;

б) $(5b-1) \cdot x = 15b-3$;

в) $(4b+1) \cdot x = b-5$.

3. Для каждого из следующих уравнений, в которых неизвестное число обозначено буквой a , число 1 является корнем уравнения. Найдите, какое число в каждом из уравнений обозначено при этом буквой x ?

а) $x+1=a$;

г) $(a-x)+2=2a$;

б) $2x-3=2+a$;

д) $(5-a)+7x=3a$;

в) $3(x-1)=x+a$.

е) $ax+3=5$.

При выполнении этого задания следует акцентировать внимание учащихся на том, что неизвестное в уравнении обозначено буквой a , а параметр – буквой x .

Если подготовленность учащихся позволяет, то можно рассмотреть и более серьезные задания.

4. Решить уравнения:

а) $x-a=0$

Ответ: при любом a $x=a$.

б) $5x=a$

Ответ: при любом a $x=\frac{a}{5}$.

в) $x:2=a$

Ответ: при любом a $x=2a$.

г) $|x|=|a|$

Ответ: при любом a $x_1=-a$, $x_2=a$.

Подобные упражнения помогают учащимся привыкнуть к параметру, к необычной форме ответов при решении уравнений. Однако даже такие, казалось бы, совершенно элементарные уравнения часто требуют от учителя подробных комментариев и терпеливых объяснений.

В некоторых сборниках задач фигурируют упражнения такого типа для учащихся 5-6 классов:

Решить уравнение относительно x : $a(x - a) + b(x - b) = x$.

Такая формулировка представляется вредной, т.к. младшие школьники не могут решить уравнение с двумя параметрами, проведя его полное исследование.

В таких заданиях следует требовать: выразить x через a и b .

Таким образом, если в течение 5 и 6 классов регулярно в урочной и внеклассной деятельности использовать различные задания пропедевтического содержания к теме "Задачи с параметрами", то это существенно облегчит учащимся изучение этого вопроса на более серьезном и глубоком уровне, поможет сломать стереотипы мышления, разнообразит уроки различных тем. Такие задачи встречают живой отклик у младших школьников, они интересны сами по себе и содержательны.

В 5-6 классах не стоит включать задачи с данным содержанием ни в самостоятельные, ни в контрольные работы, т.к. такие задания сложны для индивидуального решения. Кроме того, к заданиям такого характера учащиеся неоднократно обращаются в 7-8 классах.

Учащимся 5-6 классов предлагаются творческие домашние задания, где требуется придумать аналогичные примеры и решить их.

Пропедевтическая работа важна и интересна, более того, идея приоритета развивающей функции обучения математике является, по существу, формой гуманитаризации математического образования, его ориентации на формирование подрастающего человека как интеллектуальной личности, а реализация гуманитарного потенциала возможна лишь на базе изучения определенного учебного материала.

7 класс.

Линейные уравнения с параметрами.

Основная цель – углубить, расширить и обобщить сведения о линейных уравнениях, сформировать навык решения ключевых уравнений.

В первую очередь для подготовки к восприятию этого вопроса следует с начала года включать в устную работу на уроках задания, дублирующие материал 5-6 классов, в противном случае учителю не удастся "выкроить" время для изучения уравнений с параметрами, т.к. хорошо известно, что программа по алгебре 7-9 классов чрезвычайно плотная.

При наличии времени обратиться к параметрам можно с рассмотрения следующей задачи: "В 7, 8 и 9-м классах 105 учащихся. В 8-м классе учащихся на n больше, чем в 7-м, а в 9-м-на 3 меньше, чем в 7-м. Сколько учащихся в каждом классе, если известно, что в каждом классе их не меньше 30 человек?"

Начинаем обсуждение задачи. Учитель пишет на доске конспект решения, ученики работают устно.

Первая часть работы над задачей.

Обозначим через x число учащихся в 7-м классе. Тогда в 8-м классе было $x+n$, а в 9-м классе- $x-3$ учащихся. Имеем уравнение $x+x+n+x-3=105$, которое после упрощения примет вид $3x=108-n$.

В этом уравнении буквой x обозначено неизвестное число, а буква n выполняет роль известного числа (хотя об n мы можем сказать, что n -натуральное число). Букву n в полученном уравнении называют параметром, а само уравнение – уравнением с параметром.

Уточним, что все эти термины учащимся знакомы, и большинство из них может самостоятельно ответить на вопросы учителя ("Что обозначено буквой x , буквой n ?" и т.п.).

Вторая часть работы над задачей.

Выразим x через n , получим $x=\frac{108-n}{3}$ или $x=36-\frac{n}{3}$.

Таким образом, в 7-м классе было $36 - \frac{n}{3}$, в 8-м $36 + \frac{2n}{3}$, в 9-м $33 - \frac{n}{3}$ учащихся. Но это не окончательный ответ. Из условия задачи следует, что в каждом классе было не менее 30 человек.

Так как меньшее число учащихся может быть в 7-м и 9-м классах, должны выполняться неравенства $36 - \frac{n}{3} \geq 30$ и $33 - \frac{n}{3} \geq 30$. Отсюда получаем, что $n \leq 18$ и $n \leq 9$. Значит, $n \leq 9$.

Из того, что числа $36 - \frac{n}{3}$, $36 + \frac{2n}{3}$ и $33 - \frac{n}{3}$ должны быть натуральными, следует, что n кратно 3.

Учитывая эти два условия ($n \leq 9$ и n кратно 3), заключаем, что n равно 3, 6 или 9.

Поэтому окончательный ответ на вопрос задачи мы можем записать так: в 7-м классе было $36 - \frac{n}{3}$ учащихся, в 8-м классе $36 + \frac{2n}{3}$ и в 9-м классе $33 - \frac{n}{3}$, где $n=3, n=6, n=9$.

Иначе говоря, возможны три варианта: в 7-м, 8-м и 9-м классах могло быть соответственно 35, 38, 32; или 34, 40, 31; или 33, 42, 30 учащихся.

Задача очень объемная. Цель ее рассмотрения показать, как "рождаются" задачи с параметрами; зависимость ответа от значения параметра. Поэтому целесообразно первую часть разобрать в форме диалога с учащимися, а далее конструктивно перейти к ответу, акцентировать внимание на возможных значениях n . Непосредственно закончить решение задачи предлагается самостоятельно по желанию, с последующим выставлением оценки в журнал, либо разобрать на факультативном занятии.

Во вводной беседе следует заметить, что изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами. Наиболее трудной и важной частью решения таких задач является исследование процесса в зависимости от параметров.

Формированию некоторых навыков решения таких задач и посвящена данная тема.

Итак, решение линейного уравнения $ax=b$ в общем виде, исследование количества его корней в зависимости от значений параметра относится к задачам с параметром.

Решим ряд устных упражнений типа:

1. Дано уравнение $ax=3a+8$.

Какое уравнение получится при а) $a=10$; б) $a=-2$;

в) $a=\frac{1}{4}$; г) $a=0$.

2. Является ли уравнение $2ax(a-1)+a=4x-8a$ линейным

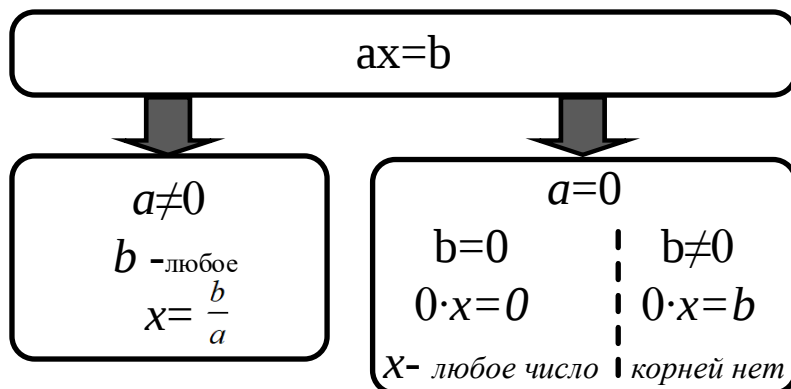
а) относительно x ;

б) относительно a .

3. Дано уравнение $ax=4x+5$.

Найдите множество корней этого уравнения в случае, если $a=4$, $a \neq 4$.

После этого восстановим схему решения линейного уравнения $ax=b$ (x – переменная, a , b – некоторые числа). Для этого можно пригласить к доске сильного ученика.



Однако, учитывая, что решение задачи обычно записывается не блок-схемой, предпочтительно знакомить учащихся со словесным алгоритмом решения. Его они и записывают в тетрадь вслед за учителем.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

$Ax=B$ (x -неизвестное, A, B - выражения, зависящие только от параметров).

1. Если $A \neq 0$, то $x = \frac{B}{A}$.

Уравнение имеет один корень, причем

$x > 0$, если $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$;

$x = 0$, если $b = 0$;

$x < 0$, если $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$.

2. а) Если $A=0, B=0$

$0 \cdot x=0$, x -любое число.

Уравнение имеет бесконечно много корней.

б) Если $A=0, B \neq 0$

$0 \cdot x=B$, корней нет.

Уравнение корней не имеет.

Сначала решаем ключевые уравнения, акцентируя внимание на правильную запись ответа.

1. $ax=10$

Решение:

а) Если $a \neq 0$, то $x = \frac{10}{a}$;

б) Если $a=0$, то $0 \cdot x = 10$, корней нет.

Ответ: при $a \neq 0$ $x = \frac{10}{a}$; при $a=0$ корней нет.

2. $0 \cdot x=a$

Решение:

а) Если $a=0$, то $0 \cdot x=0$, x -любое число;

б) Если $a \neq 0$, то $0 \cdot x=a$, корней нет.

Ответ: при $a=0$ x -любое число; при $a \neq 0$ корней нет.

Обращаем внимание, что значение коэффициента известно, буквой a обозначен свободный член. При решении данного уравнения работает второй шаг алгоритма.

3. $2m(m-2)x = m-2$

Решение:

1. Если $2m(m-2) \neq 0$, то $m \neq 0, m \neq 2$; $x = \frac{m-2}{2m(m-2)}$; $x = \frac{1}{2m}$.

2. а) Если $m=0$, то на первых порах записываем подробно, чтобы ученики видели источник появления уравнения,

$$2 \cdot 0(0-2) \cdot x = 0-2,$$

$$0 \cdot x = -2,$$

корней нет.

б) Если $m=2$, то

$$2 \cdot 2(2-2) \cdot x = 2-2,$$

$$0 \cdot x = 0,$$

x -любое число.

Ответ: при $m \neq 0, m \neq 2$ $x = \frac{1}{2m}$;

при $m=0$ корней нет;

при $m=2$ x -любое число.

4. $ax+3=4a-2x$

Решение:

Преобразуем уравнение к виду $ax=b$.

$$ax+2x=4a-3,$$

$$(a+2)x=4a-3.$$

1. Если $a+2 \neq 0$, то

$$a \neq -2, \quad x = \frac{4a-3}{a+2};$$

2. Если $a = -2$, то

$$(-2+2)x = 4 \cdot (-2) - 3,$$

$$0 \cdot x = -11,$$

корней нет.

Ответ: при $a \neq -2$ $x = \frac{4a-3}{a+2}$;

при $a = -2$ корней нет.

5. При каком значении параметра a уравнение $\frac{5x-a}{3} = \frac{6x-1}{4}$ имеет

корень:

а) больший нуля; б) меньший нуля; в) равный нулю?

Решение:

$$\frac{5x-a}{3} = \frac{6x-1}{4}$$

Умножим обе части уравнения на 12:

$$20x - 4a = 18x - 3;$$

$$20x - 18x = 4a - 3;$$

$$2x = 4a - 3;$$

$$x = \frac{4a-3}{2};$$

$$x = 2a - 1,5.$$

а) $x > 0$, если $2a - 1,5 > 0$, $2a > 1,5$, $a > 0,75$;

б) $x < 0$, если $2a - 1,5 < 0$, $2a < 1,5$, $a < 0,75$;

в) $x = 0$, если $2a - 1,5 = 0$, $2a = 1,5$, $a = 0,75$.

Ответ: при $a > 0,75$ $x > 0$;

при $a < 0,75$ $x < 0$;

при $a = 0,75$ $x = 0$.

Далее учащиеся решают блок задач на отработку задач типа 1-5. Такие задачи составляются весьма легко.

6. Составить линейное уравнение, обе части которого содержат параметр a так, чтобы уравнение имело решение при любом действительном a .

Ответ: $(a^2+1)x=a$ или $ax=a$.

7. При каком целом неотрицательном значении n уравнение $\frac{4n-6}{9} - \frac{x-2}{3} = 1$ имеет целые корни?

Решение:

Умножим обе части уравнения на 9:

$$4n-6-3(x-2)=9;$$

$$4n-6-3x+6=9;$$

$$-3x=9-4n;$$

$$x = \frac{9-4n}{-3};$$

$$x = \frac{4n-9}{3}.$$

Уравнение имеет целые корни, если $4n-9$ кратно числу 3, следовательно, $4n$ кратно числу 3, отсюда $n=3k$, где k -натуральное число.

Ответ: $n=3k, k \in N$.

8. Решить уравнение $x-xy+5y=7$ в целых числах.

Решение:

Решим это уравнение относительно x , т.е. букву y будем считать параметром.

Имеем:

$$x-xy=7-5y;$$

$$x(1-y)=7-5y;$$

$$x = \frac{7-5y}{1-y};$$

Выделим из дроби $\frac{5y-7}{y-1}$ целую часть:

$$\frac{5y-7}{y-1} = \frac{5y-5-2}{y-1} = \frac{5(y-1)}{y-1} - \frac{2}{y-1} = 5 - \frac{2}{y-1}.$$

Итак, $x = 5 - \frac{2}{y-1}$. Дробь $\frac{2}{y-1}$ обращается в целое число лишь при тех значениях y , при которых $y-1$ является делителем числа 2, т.е. при y , равном $-1, 0, 2, 3$.

Вычислим соответствующие значения x :

$$\text{Если } y = -1, \text{ то } x = 5 - \frac{2}{-2} = 6;$$

$$\text{Если } y = 0, \text{ то } x = 5 - \frac{2}{-1} = 7;$$

$$\text{Если } y = 2, \text{ то } x = 5 - \frac{2}{1} = 3;$$

$$\text{Если } y = 3, \text{ то } x = 5 - \frac{2}{2} = 4.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 6; y_1 = -1;$$

$$x_2 = 7; y_2 = 0;$$

$$x_3 = 3; y_3 = 2;$$

$$x_4 = 4; y_4 = 3.$$

Чуть позже, когда будут изучены формулы сокращенного умножения, можно предложить следующие задачи:

9. Решить относительно x уравнение $x(a^2-1) = (a+1)(1-x)$.

Решение: $x(a^2-1) = a+1-x(a+1);$

$$((a^2-1) + (a+1))x = a+1;$$

$$(a^2+a)x = a+1;$$

$$a(a+1)x = a+1.$$

1. Если $a(a+1) \neq 0$, то $a \neq 0, a \neq -1$

$$x = \frac{a+1}{a(a+1)}; x = \frac{1}{a}.$$

2. а) Если $a=0$, то $0 \cdot x = 1$, корней нет.

б) Если $a=-1$, то $0 \cdot x = 0$, x -любое число.

Ответ: при $a \neq 0, a \neq -1$ $x = \frac{1}{a}$;

при $a=0$ корней нет;

при $a = -1$ x - любое число.

10. При каких значениях параметра n уравнение $(n^2-4)x = n^3-2n^2-n+2$:

а) имеет единственный корень;

б) имеет бесконечное множество корней;

в) не имеет корней?

11. Зная, что $n \in N$, выясните, имеет ли заданное уравнение целые решения и, если имеет, то при каких n :

а) $n(x-1) = n^2+n+1$

Ответ: при $n=1$.

б) $n(x+5) = n^2+n+4$

Ответ: при $n=1, n=2, n=4$.

12. При каких значениях параметра p уравнение $p x (px+3) + 6 = x (px-6)$ является линейным?

При решении текстовых задач, содержащих параметры, приходится учитывать допустимые значения параметра, определяемые смыслом задачи. Иногда границы, в которых заключены значения параметра, приходится устанавливать, исходя из реального смысла задачи.

13. На улице 24 дома, которые имеют 12, 16 и 17 этажей. При этом 17-этажных домов в 2 раза больше, чем 16-этажных, а 12-этажных на n меньше, чем 16-этажных домов. Сколько разных типов домов на улице?

Решение: Пусть x -число 16-этажных домов. Тогда $2x$ -число 17-этажных домов, а $x-n$ -число 12-этажных домов. Имеем уравнение:

$$x+2x+x-n=24;$$

$$4x=24+n;$$

$$x = \frac{24+n}{4};$$

$$x = 6 + \frac{n}{4}.$$

По смыслу задачи $n \in N$, следовательно, $(x-n)$ также натуральное число и n кратно 4. Это возможно лишь при $n=4$. Отсюда $x=7$, $2x=14$, $x-n=3$.

Ответ: четырнадцать 17-этажных домов,
семь 16-этажных и
три 12-этажных дома.

14. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на $2n$. Найти эти числа для значения параметра n из промежутка $50 < n < 100$.

Решение: Пусть x -меньшее число; тогда следующее число $x+1$. Их сумма равна $2x+1$, а сумма их квадратов $x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$. По условию:

$$(2x+1)^2 - (2x^2 + 2x + 1) = 2n;$$

$$x(x+1) = n.$$

Поскольку $x \in N$, $n \in N$ и $50 < n < 100$, то это уравнение проще всего решить подбором.

Уравнению с дополнительными ограничениями удовлетворяют числа 7, 8 и 9.

Ответ: 7 и 8, или 8 и 9, или 9 и 10.

15. Сумму a выплатили 5-рублевыми и 10-рублевыми монетами, причем тех и других выдали поровну. Сколько было выдано 5-рублевых монет?

Ответ: $\frac{a}{15}$, где a -число, кратное 15.

16. Отец старше сына в n раз, а его дочь моложе брата в 2 раза. Сколько лет отцу, сыну и дочери, если отец старше дочери на 28 лет?

Ответ: отцу 32 года, сыну 8 лет, дочери 4 года.

17. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на a , где a -двузначное число, большее 50. Найдите эти числа.

Ответ: 8 и 9, или 9 и 10, или 10 и 11.

Очевидно, что предложенные задачи являются нестандартными для семиклассников, поэтому некоторые из них выполняются в классе как дополнительные к уроку, некоторые рассматриваются на кружке или предлагаются для долгосрочного домашнего задания.

Изучение темы "Системы линейных уравнений" можно разнообразить содержанием таких параметрических задач:

18. При каких значениях b имеют общий корень уравнения:

а) $3x+7=0$ и $2x-b=0$;

б) $2x=3b-1$ и $3x=5b+7$?

Ответ: а) $-4\frac{2}{3}$; б) -17 .

19. При каких значениях a и b система уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} 3x-5y=a, \\ 2x+y=b; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} ax+by=2, \\ 5x+by=3+a; \end{cases}$$

имеет решение $x=3, y=-1$.

Ответ: а) $a=14, b=5$; б) $a=3,5, b=8,5$.

20. При каких значениях a и b прямая $y=ax+b$ проходит через точки $M(1;5)$ и $N(-5;-3)$?

Ответ: $a=1\frac{1}{3}; b=3\frac{2}{3}$.

21. При каких значениях a и b системе уравнений
$$\begin{cases} 3x+2y=15a, \\ \frac{1}{a}x+y=9; \end{cases}$$

удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого a найдите решение системы.

Ответ: $a=2, x=y=6$.

При повторении материала в конце года можно познакомить учащихся с различными способами решения уравнений с параметром.

22. Сколько решений имеет уравнение $|x|=a$ в зависимости от параметра a ?

Решение:

Аналитический способ.

Используя определение модуля действительного числа, заключаем:

При $a > 0$ уравнение имеет два корня: $x = -a$, $x = a$.

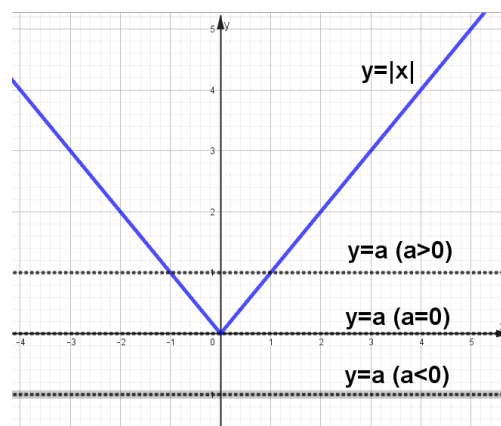
При $a = 0$ уравнение имеет один корень: $x = 0$.

При $a < 0$ уравнение не имеет корней.

Графический способ.

Построим графики функций

$y = |x|$ и $y = a$



Очевидно, что:

1) при $a > 0$ графики пересекаются в двух точках

$(-a, a)$ и (a, a) , значит, уравнение имеет два корня: $x = -a$, $x = a$;

2) при $a = 0$ точка пересечения одна-начало координат, следовательно, уравнение имеет один корень: $x = 0$.

3) при $a < 0$ графики функций не пересекаются-корней нет.

Ответ: при $a > 0$ два корня;

при $a = 0$ один корень;

при $a < 0$ корней нет.

23. Решить уравнение $ax = |x|$.

Решение:

Аналитический способ.

1. При $x \geq 0$ $x = |x|$, следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$ax = x,$$

$$(a-1)x = 0.$$

а) Если $a-1 \neq 0$, $a \neq 1$, $x = 0$;

б) Если $a-1=0$, $a=1$, $0 \cdot x=0$, x -любое число, большее или равное 0 ($x \geq 0$).

2. При $x \leq 0$ $|x|=-x$, уравнение равносильно уравнению

$$ax=-x,$$

$$(a+1)x=0.$$

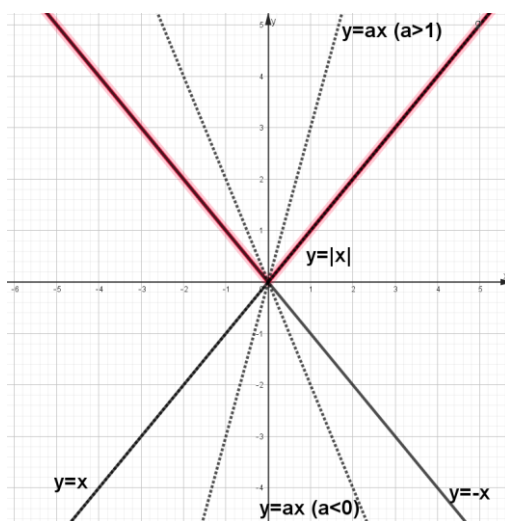
а) Если $a+1 \neq 0$, $a \neq -1$, $x=0$;

б) Если $a+1=0$, $a=-1$, $0 \cdot x=0$, x -любое число, меньшее или равное 0 ($x \leq 0$).

Графический способ (1).

Построим графики функций $y=|x|$ и $y=ax$.

Графиками функций $y=ax$ являются прямые, проходящие через начало координат, угловой коэффициент которых равен a .



1. При $a \neq -1$ уравнение имеет один корень: $x=0$.

2. При $a=1$ прямая $y=ax$ ($y=x$) содержит луч OA , и уравнение имеет бесконечно много корней: $x \geq 0$.

3. При $a=-1$ прямая $y=ax$ ($y=-x$) содержит луч OB , и уравнение имеет бесконечно много корней: $x \leq 0$.

Графический способ (2).

Данное уравнение для любого значения параметра a всегда имеет, по крайней мере, одно решение $x=0$, т.к. графики функций $y=|x|$ и $y=ax$ при любых значениях параметра a имеют общую точку-начало координат.

Пусть $x \neq 0$. Выразим из уравнения $ax=|x|$ параметр a через x : $a = \frac{|x|}{x}$ и

построим графики функций: $y=a$ и $y = \frac{|x|}{x}$. Используя определение модуля, получим:

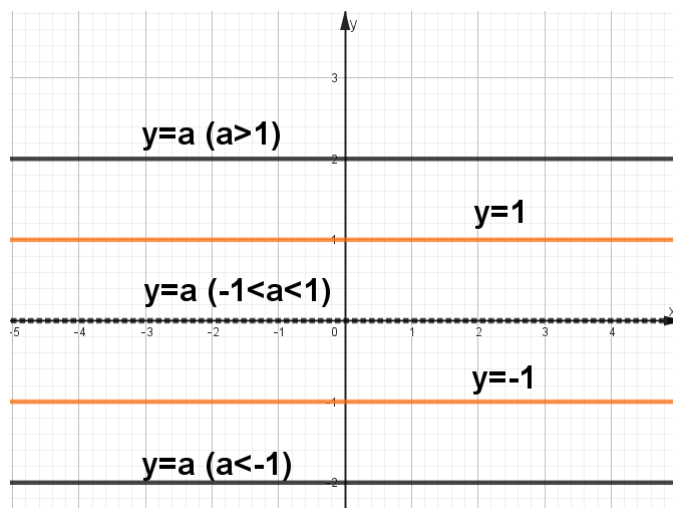
$$y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, \text{при } x < 0 \\ 1, \text{при } x > 0 \end{cases}$$

При $a \neq \pm 1$ графики не имеют общих точек, следовательно, корней уравнения кроме $x=0$, нет.

При $a=1$ график функции $y=a$ ($y=1$) содержит правую часть графика функции $y = \frac{|x|}{x}$ ($x>0$), следовательно, уравнение имеет бесконечно много корней: $x \geq 0$ (учитываем, что $x=0$ при любых a).

При $a=-1$ график функции $y=a$ ($y=-1$) содержит левую часть графика

функции $y = \frac{|x|}{x}$ ($x<0$), и уравнение имеет бесконечно много корней: $x \leq 0$.



Ответ: при $a \neq \pm 1$ $x=0$;

при $a=1$ $x \geq 0$;

при $a=-1$ $x \leq 0$.

Это упражнение является очень полезным, т.к. во многих случаях графический метод более уместен, чем аналитический, а на первых порах следует рассматривать все способы, чтобы выработать у учащихся зоркость в выборе метода решения более сложных задач.

Итак, все рассмотренные выше упражнения (1-23) и им подобные имеют ясную дидактическую цель-помочь учащимся составить представление о параметре, о том, что значит решить уравнение с параметром.

Учащиеся 7 класса должны усвоить главное: параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет "общаться" с параметром как с числом, а во-вторых, степень свободы общения ограничивается его неизвестностью. Так, деление на выражение, содержащее параметр, требует

дополнительного исследования. Как правило, результаты этих исследований влияют и на решение, и на ответ.

При решении задач с параметром учитель должен обратить внимание учащихся на необходимость осторожного, деликатного обращения с фиксированным, но неизвестным числом.

К концу года учащиеся должны уметь решать задачи типа $1 \div 6$, 9, 10, 18, 19. Регулярно в проверочные и контрольные работы последними заданиями включаются задачи с параметрами.

В мае проводится контрольная работа, в которую включены все типы основных задач, однако уровень сложности зависит непосредственно от контингента учащихся.

8 класс

Сейчас перед каждым учеником ставится задача научиться овладевать фундаментальными знаниями, т.е. не набором некоторых правил и умений решать стандартные задачи, а, прежде всего, глубокому пониманию сути изучаемых явлений, приобщению к поиску самих задач, постановке этих задач, формулированию гипотез, испытанию их на правдоподобие.

В процессе исследования ребята разрабатывают способы решения поставленной задачи, реализуют их, учатся обобщать полученные результаты, применять их для постановки новых проблем.

Уравнения с параметрами, приводимые к линейным

Следующий шаг в изучении уравнений с параметром, составляют уравнения, при решении которых требуется дополнительная проверка, связанная с ограничениями их области определения.

При изучении темы "Рациональные дроби" дается определение области допустимых значений переменных, а также условие равенства дроби нулю, что составляет базу для решения таких уравнений.

Прежде, чем заняться решением уравнений, мы опять возвращаемся к основам темы "Решение задач с параметрами", но уже на более серьезном теоретическом уровне.

Рассмотрим уравнения: $\frac{1}{x-a} + \frac{x}{a} = 2;$ $|x-5|=a;$ $\frac{x-a}{a-1} = 0$

Каждое из этих уравнений можно рассматривать как уравнение с переменными x и a . Однако мы говорим о решении уравнения относительно x , считая x и a неравноценными, и хотим выразить x через a , считая a известным. При таком рассмотрении переменная x называется неизвестным, переменная a - параметром.

Если параметру, содержащемуся в уравнении, придать некоторое значение, то возможен один из двух случаев:

1. Получится уравнение, содержащее лишь данные числа и неизвестные и не содержащее параметров;

2. Получится условие, лишенное смысла.

В первом случае значение параметра называется допустимым, во втором – недопустимым.

(обсудить предъявленные уравнения)

Решить уравнение, содержащее параметр – значит, для каждого допустимого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения.

Условились параметры обозначать первыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, \dots, k, l, m$, а неизвестные – последними: x, y, z .

Перейдем к рассмотрению ключевых уравнений.

(подобрать подготовительный материал для устной работы очень легко)

1. $\frac{a}{x-2}=1.$

Решение:

1. ОДЗ: $x \neq 2$.

2. Умножим обе части уравнения на $x - 2 \neq 0$, получим:

$$a = x - 2,$$

$$x = a + 2.$$

3. Найдем недопустимые значения a , т.е. решим уравнение:

$$a + 2 = 2,$$

$$a = 0.$$

(Комментируем: при $a=0$ $x=2$, но число 2 не входит в область допустимых значений исходного уравнения, следовательно, не может быть его корнем).

Ответ: при $a \neq 0$ $x = a + 2$;

при $a = 0$ корней нет.

$$2. \frac{x-4}{x+1} + \frac{2}{a} = \frac{1}{a(x+1)}.$$

Решение:

1. ОДЗ: $x \neq -1, a \neq 0$.

2. Умножим обе части уравнения на $a(x+1) \neq 0$, получим:

$$\begin{aligned} a(x-4) + 2x + 2 &= 1, \\ (a+2)x &= -1 + 4a. \end{aligned} \tag{1}$$

3. Найдем недопустимые значения a :

(комментарий: подставим $x=-1$ в уравнение (1)):

$$\begin{aligned} (a+2) \cdot (-1) &= -1 + 4a, \\ -a - 2 &= -1 \\ -5a &= 1, \\ a &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

При $a = -\frac{1}{5}$ корней нет.

(Комментарий: решим уравнение (1), это линейное уравнение относительно x , решение которого изучено в 7 классе.)

$$4. (a+2)x = -1 + 4a$$

1. Если $a+2 \neq 0, a \neq -2$, то $x = \frac{-1+4a}{a+2}$;

2. Если $a+2=0, a=-2$, то

$$0 \cdot x = -9,$$

корней нет.

(Комментарий: обратите серьезное внимание на выписку ответа, можно упустить некоторые моменты).

Ответ: при $a \neq -2, a \neq -\frac{1}{5}, a \neq 0$ $x = \frac{4a-1}{a+2}$;

при $a=-2, a=-\frac{1}{5}, a=0$ -корней нет.

Вторую часть ответа можно выписать и следующим образом:

при $a=-2$, $a=-\frac{1}{5}$, корней нет;

при $a=0$ левая и правая части уравнений не имеют смысла.

3. $\frac{3}{kx-12} = \frac{1}{3x-k}$.

Решение:

1. ОДЗ: $kx-12 \neq 0$; $x \neq \frac{12}{k}$;

$$3x-k \neq 0; x \neq \frac{k}{3}.$$

2. Умножим обе части уравнения на $(kx-12)(3x-k) \neq 0$, получим:

$$\begin{aligned} 3(3x-k) &= kx-12, \\ 9x-3k &= kx-12, \\ 9x-kx &= 3k-12, \\ (9-k)x &= 3k-12. \end{aligned} \tag{1}$$

3. Найдем недопустимые значения k :

1) Если $x = \frac{12}{k}$, то $(9-k)\frac{12}{k} = 3k-12$,

$$108-12k = 3k^2-12,$$

$$k^2 = 36,$$

$$k = \pm 6.$$

2) Если $x = \frac{k}{3}$, то $(9-k)\frac{k}{3} = 3k-12$,

$$9k-k^2 = 9k-36,$$

$$k^2 = 36,$$

$$k = \pm 6.$$

При $k = \pm 6$ корней нет.

4. Решим уравнение $(9-k)x = 3k-12$.

1) Если $9-k \neq 0$, $k \neq 9$, то $x = \frac{3k-12}{9-k}$;

2) Если $9-k=0$, $k=9$, то

$$0 \cdot x = 15,$$

корней нет.

Ответ: при $k \neq -6$, $k \neq 6$, $k \neq 15$ $x = \frac{3k-12}{9-k}$;

при $k = -6$, $k = 6$, $k = 15$ корней нет.

Каждое из этих трех уравнений должно быть основательно проработано в классе, так как в их решении есть "подводные камни", которые должны преодолеть восьмиклассники.

Далее можно предложить учащимся самостоятельно составить словесное описание алгоритма решения таких уравнений.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ, СВОДЯЩЕГОСЯ К ЛИНЕЙНОМУ

1. Найти область допустимых значений неизвестного и параметров, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель, преобразовать к виду линейного.
3. Найти недопустимые значения параметра.
4. Решить линейное уравнение с параметром.
5. Выписать ответ с учетом пунктов 3, 4.

Для формирования навыка решим следующие уравнения:

4. $\frac{x}{x+1} = a.$

Решение:

1. ОДЗ: $x \neq -1$;

2. Умножим обе части уравнения на $x+1 \neq 0$, получим:

$$x = a(x+1),$$

$$x = ax + a,$$

$$x - ax = a,$$

$$(1-a)x = a.$$

3. Найдем недопустимые значения a :

Если $x=-1$, то $(1-a) \cdot (-1)=a$, $a-1=a$, $0 \cdot a=1$, корней нет.

Не существует значений a , при которых $x=-1$.

4. $(1-a)x=a$.

1) Если $1-a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x = \frac{a}{1-a}$;

2) Если $1-a=0$, $a=1$, то $0 \cdot x=1$, корней нет.

Ответ: при $a \neq 1$ $x = \frac{a}{a-1}$;

при $a=1$ корней нет.

5. $\frac{x-a}{x-1}=0$.

Ответ: при $a \neq 1$ $x=a$;

при $a=1$ корней нет.

6. $\frac{2ax+x+1}{(a+1)(x+3)} = \frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)} - \frac{a}{a+1}$.

Решение:

1.ОДЗ: $x \neq -3$; $x \neq 2$;

$a \neq -1$;

2.Упростим уравнение:

$$\frac{2ax+x+1}{(a+1)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3} - \frac{a}{a+1},$$

После преобразований, которые учащиеся выполняют самостоятельно, получим:

$$2ax=1-a.$$

3. Найдем недопустимые значения a :

1) Если $x=-3$, то $2a(-3)=1-a$,

$$-6a=1-a,$$

$$-5a=1,$$

$$a=-0,2.$$

2) Если $x=2$, то $2a \cdot 2=1-a$,

$$5a=1,$$

$$a=0,2.$$

При $a=\pm 0,2$ корней нет.

$$4.2ax=1-a.$$

1) Если $2a \neq 0, a \neq 0$, то $x = \frac{1-a}{2a}$;

2) Если $2a=0, a=0$, то $0 \cdot x=1$, корней нет.

Ответ: при $a \neq -1, a \neq \pm 0,2, a \neq 0$ $x = \frac{1-a}{2a}$;

при $a=-1, a=\pm 0,2, a=0$ корней нет.

$$7. \frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3}.$$

Ответ: при $m \neq 1, m \neq -0,4, m \neq 2,25$ $x = \frac{31-2m}{4m-9}$;

при $m=-0,4, m=2,25$, корней нет;

при $m=1$ уравнение не имеет смысла.

Следующие два уравнения можно отнести в банк задач и рассмотреть их решение в любое удобное время вплоть до 11 класса.

$$8. \frac{a}{3a+x} = \frac{2}{b+x}.$$

Решение:

1.ОДЗ: $x \neq -3a; x \neq -b$.

$$2.a(b+x)=6a+2x,$$

$$(a-2)x=a(6-b).$$

3.Найдем недопустимые значения a и b :

1) Если $x=-3a$, то $(a-2) \cdot (-3a)=a(6-b)$;

$$a(b-3a)=0;$$

$$\begin{cases} a=0; \\ b=3a. \end{cases}$$

2) Если $x = -b$, то $(a-2)(-b) = a(6-b)$,

$$2b = 6a,$$

$$b = 3a.$$

При $a=0$ и $b=3a$ корней нет.

$$4.(a-2)x = a(6-b).$$

1. Если $a-2 \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = \frac{a(6-b)}{a-2}$;

2. Если $a-2=0$, $a=2$, то $0 \cdot x = 2(6-b)$,

а) при $b \neq 6$ $0 \cdot x = 12-2b$, корней нет;

б) при $b=6$ $0 \cdot x = 0$, x -любое число.

Ответ: при $a \neq 0$, $a \neq 2$, $b \neq 3a$ $x = \frac{a(6-b)}{a-2}$;

при $a=0$ корней нет;

при $a=2$, $b \neq 6$ корней нет;

при $a=2$, $b=6$ x -любое число;

при $a \neq 2$, $b=3a$ корней нет.

Задачу можно усложнить, потребовав исследовать знаки корней, тогда в ответе появится дополнение:

$$x > 0 \text{ при } \begin{cases} a < 0, \\ b < 6; \end{cases} \begin{cases} 0 < a < 2, \\ b < 6; \end{cases} \begin{cases} a > 2, \\ b < 6; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ при } b = 6;$$

$$x < 0 \text{ при } \begin{cases} a < 0, \\ b > 6; \end{cases} \begin{cases} 0 < a < 2, \\ b > 6; \end{cases} \begin{cases} a > 2, \\ b < 6; \end{cases}$$

Аналогичным требованием можно усложнить задачу 3, тогда:

$$x > 0 \text{ при } k \in (4; 6) \cup (6; 9),$$

$$x = 0 \text{ при } k = 4;$$

$$x < 0 \text{ при } k \in (-\infty; -6) \cup (-6; 4) \cup (9; \infty).$$

Требуется применить метод интервалов.

$$9. \frac{a^2 + x}{b^2 - x} - \frac{a^2 - x}{b^2 + x} = \frac{4abx + 2a^2 - 2b^2}{b^4 - x^2}.$$

Решение:

1. ОДЗ: $a \in R, b \in R, x \neq \pm b^2$.

2. Умножим обе части уравнения на $b^4 - x^2 \neq 0$

$$(a-b)^2 x = a^2 - b^2.$$

3. Найдем недопустимые значения a и b ($a \neq b$):

1) Если $x = b^2$, то $(a-b)^2 b^2 = a^2 - b^2$;

$$a = \frac{b(1+b^2)}{b^2-1};$$

2) Если $x = -b^2$, то $(a-b)^2(-b^2) = a^2 - b^2$,

$$a = \frac{b(b^2-1)}{b^2+1};$$

При $a = \frac{b(1+b^2)}{b^2-1}$, $a = \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$ корней нет.

$$4. (a-b)^2 x = a^2 - b^2.$$

1) Если $(a-b)^2 \neq 0$, $a \neq b$, то $x = \frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2}$;

$$x = \frac{a+b}{a-b}.$$

2) Если $(a-b)^2 = 0$, $a = b$, то

$0 \cdot x = 0$, x -любое число, кроме $x = \pm b^2$ (из ОДЗ).

Ответ: при $a \neq b$, $a \neq \frac{b(1+b^2)}{b^2-1}$, $a \neq \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$ $x = \frac{a+b}{a-b}$;

при $a = b$, x -любое число, кроме $\pm b^2$;

при $a = \frac{b(1+b^2)}{b^2-1}$, $a = \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$ решений нет.

При решении уравнений такого вида от учащихся требуется строгое соблюдение алгоритма. Если позволять менять местами шаги 3 и 4, то практика показывает, что шаг 3 учащиеся в решении теряют.

Также обращается особое внимание на строгость порядка при выписке ответа, рассмотрение последовательно всех значений параметра согласно решению.

Из ранее изученного восьмиклассникам на факультативе можно предложить такие задания:

10. Решить уравнение $|x^2-1|+|a(x-1)|=0$.

Решение:

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x^2-1|=0, \\ |a(x-1)|=0; \end{cases} \begin{cases} x^2-1=0, \\ a(x-1)=0; \end{cases} \begin{cases} x=-1, \\ a(x-1)=0; \end{cases} \begin{cases} x=-1, \\ a=0; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ a(x-1)=0; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ a-\text{любое число}; \end{cases}$$

Ответ: при $a \neq 0, x=1$;

при $a=0, x=\pm 1$.

11. Найти все значения параметра b такие, что при любых значениях параметра a система:

$$\begin{cases} x-2y=a, \\ ax+3y=b; \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

имела хотя бы одно решение.

Решение:

Систему решаем методом подстановки.

$$\begin{cases} y = \frac{x-a}{2}, \\ ax+3y=b; \end{cases}$$

Подставим y в уравнение (2), получим:

$$ax + \frac{3(x-a)}{2} = b;$$

$$\left(a + \frac{3}{2}\right)x = b + \frac{3}{2}a$$

1. Если $a + \frac{3}{2} \neq 0, a \neq -\frac{3}{2}$, то $x = \frac{b + \frac{3}{2}a}{a + \frac{3}{2}}$.

Уравнение, а значит, и система, имеют решение при любом действительном b .

2. Если $a + \frac{3}{2} = 0$, $a = -\frac{3}{2}$, то $0 \cdot x = b - \frac{9}{4}$.

Уравнение имеет решение при $b = \frac{9}{4}$.

Значит, независимо от значения a система будет иметь решения при $b = \frac{9}{4}$.

Ответ: $b = \frac{9}{4}$.

В восьмом классе более серьезно изучаются графики функции. Восьмиклассники знакомы с элементарными преобразованиями графиков. Поэтому целесообразно после изучения функции $y = \frac{k}{x}$ рассмотреть задания, в которых применяется графический способ решения, и его применение преимущественно.

12. Сколько корней имеет уравнение $||x| - 2| = a$ при различных значениях параметра a ?

Решение:

Построим график функции $y = ||x| - 2|$, проведя ряд последовательных преобразований: $y = x - 2 \rightarrow y = |x| - 2 \rightarrow y = ||x| - 2|$, и график функции $y = a$.

Ответ:

при $a < 0$ корней нет;

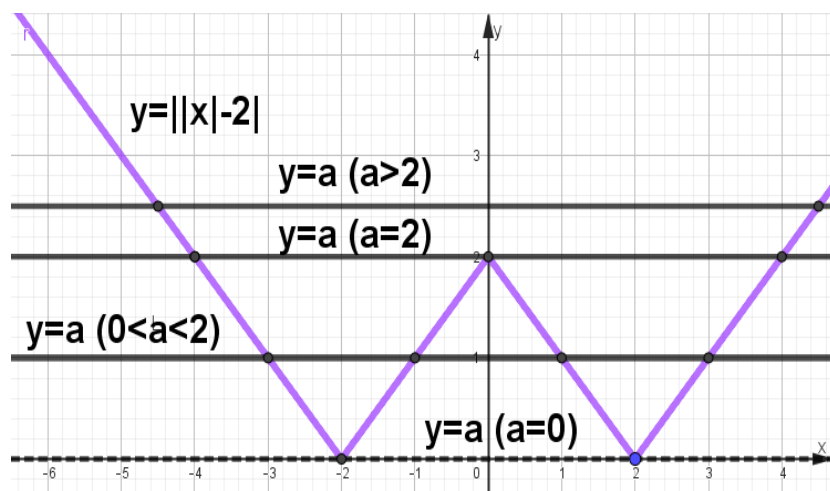
при $a = 0$ два корня;

при $0 < a < 2$ четыре

корня;

при $a = 2$ три корня;

при $a > 0$ два корня.

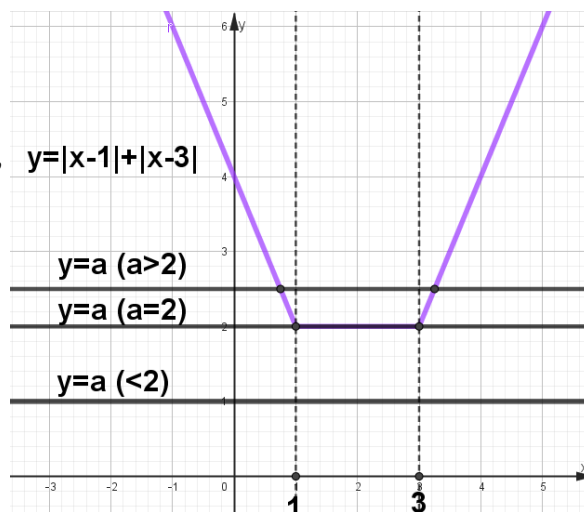


13. Решить уравнение $|x - 1| + |x - 3| = a$.

Решение:

Построим графики функций $y = |x - 1| + |x - 3|$ и $y = a$.

$$y = |x - 1| + |x - 3| = \begin{cases} 4 - 2x, & \text{при } x < 1, \\ 2, & \text{при } 1 \leq x < 3, \\ 2x - 4, & \text{при } x \geq 3. \end{cases} \quad y = |x - 1| + |x - 3|$$



1. Если $a < 2$, то ломаная и прямая $y = a$ не пересекаются. Уравнение корней не имеет.

2. Если $a = 2$, то ломаная и прямая совпадают при $1 \leq x \leq 3$. Уравнение имеет бесконечно много корней.

3. Если $a > 0$, то ломаная и прямая пересекаются в двух точках. Уравнение имеет два корня: $4 - 2x = a$ или $2 - 4x = a$;

$$x = \frac{4 - a}{2} \quad x = \frac{a + 4}{2}.$$

Ответ: при $a < 2$ корней нет;

при $a = 2$, $1 \leq x \leq 3$;

при $a > 2$, $x_1 = \frac{4 - a}{2}$; $x_2 = \frac{a + 4}{2}$.

Рассмотрим более сложный, но доступный восьмикласснику, пример.

14. Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $|x + 2| = ax + 1$?

Решение:

При $x = 0$ получаем $|0 + 2| = a \cdot 0 + 1$, т.е. $x = 0$ не является корнем уравнения ни при каких значениях параметра a .

Преобразуем уравнения с учетом, что $x \neq 0$.

$$\frac{|x + 2| - 1}{x} = a.$$

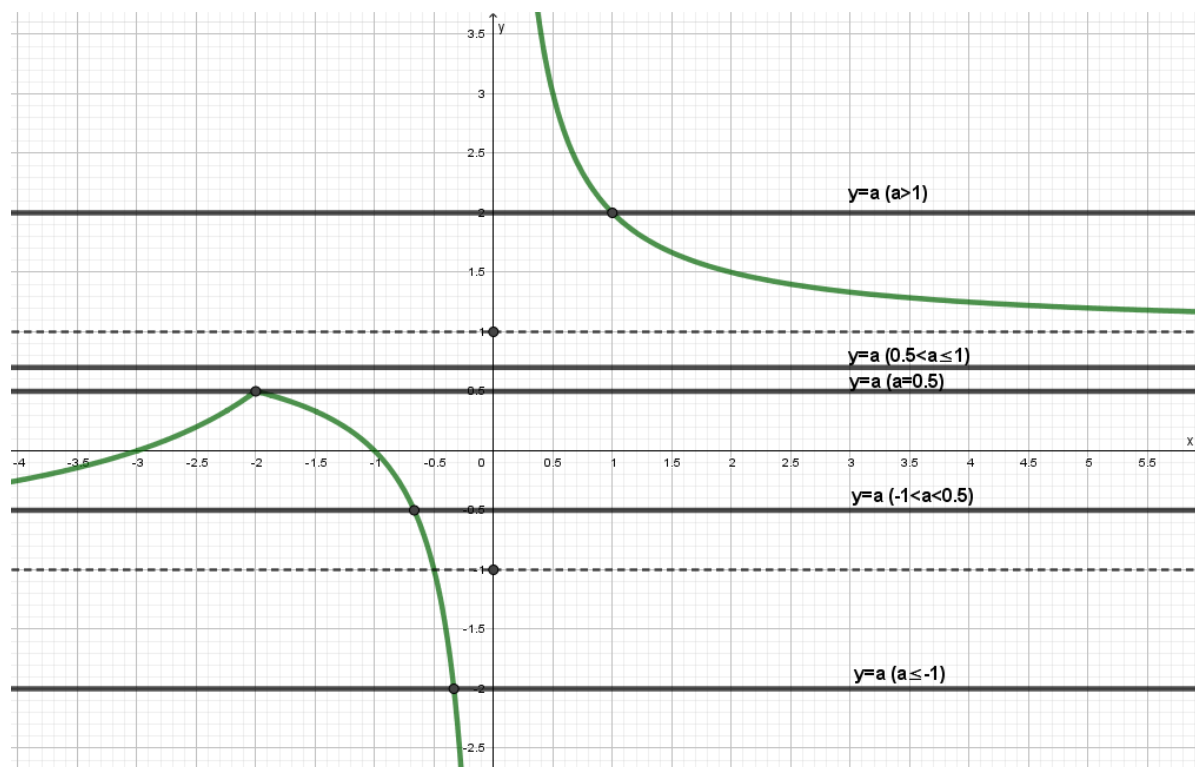
Построим графики функций $y = \frac{|x+2|-1}{x}$ и $y=a$.

$$y = \frac{|x+2|-1}{x} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x}, & \text{при } x \geq -2, \\ -1 - \frac{3}{x}, & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

График функции $y = \frac{1}{x} + 1$ — гипербола $y = \frac{1}{x}$, сдвинутая на 1 вверх по Oy.

График функции $y = -\frac{3}{x} - 1$ — гипербола $y = -\frac{3}{x}$, сдвинутая на 1 вниз по Oy.

При различных значениях параметра a графиками функций $y=a$ являются прямые, параллельные оси абсцисс.



При $a \leq -1$ и $a > 1$ графики имеют одну общую точку пересечения, уравнение имеет один корень;

При $-1 < a < \frac{1}{2}$ точек пересечения две, уравнение имеет два корня;

При $\frac{1}{2} < a \leq 1$ точек пересечения нет, уравнение корней не имеет;

При $a = \frac{1}{2}$ один корень.

Ответ: при $a \leq -1$ один корень;

при $-1 < a < \frac{1}{2}$ два корня;

при $a = \frac{1}{2}$ один корень;

при $\frac{1}{2} < a \leq 1$ корней нет;

при $a > 1$ один корень.

Пока мы не формулируем четкий алгоритм применения графического метода, только лишь устно составляем план решения задачи. Рассмотрение же таких задач с восьмиклассниками считаю необходимым, иначе в 10-11 классах при подготовке к экзаменам придется начинать все сначала, значит, теряется драгоценное время, ведь восстанавливать материал гораздо легче, чем изучать заново.

Линейные неравенства с параметрами

Основная цель: сформировать умение решать элементарные линейные неравенства с параметрами.

В первую очередь расширим определение линейного неравенства.

Каждое из неравенств вида

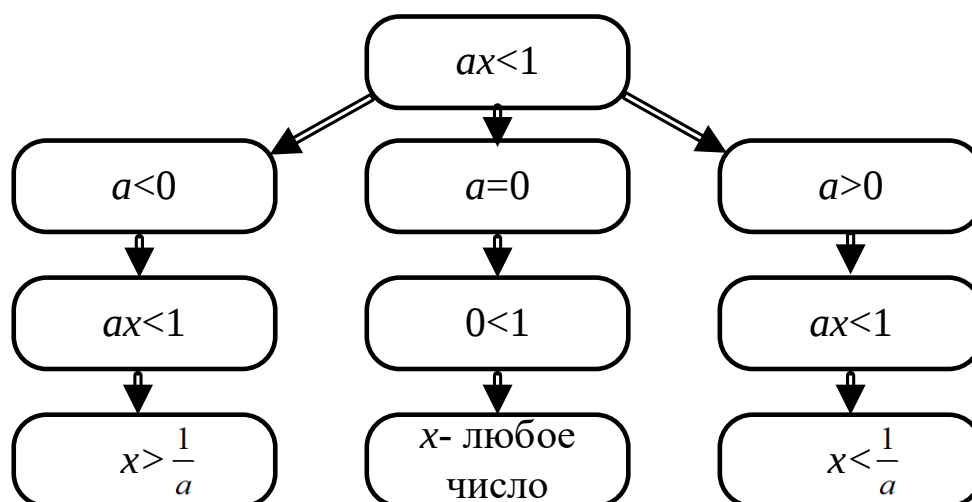
$$Ax > B, Ax < B, Ax \geq B, Ax \leq B,$$

где A и B -действительные числа или функции от параметров, а x -неизвестная величина, называется линейным неравенством с одним неизвестным (x).

Рассмотрим простейший пример:

15. Решить неравенство $ax < 1$.

Невнимательный ученик быстро дает ответ $x < \frac{1}{a}$. Тогда следует попросить его подставить вместо a различные значения и проверить, всегда ли совпадает решение с общим видом. Сделав соответствующие замечания, вызвать ученика к доске с просьбой составить блок-схему решения этого неравенства.



Учитель задает по заданию такие вопросы: "Каким будет решение, если вместо числа 1 записать -5 ? вместо знака $<$ записать знак $\geq$?" и т.п. Ученики активно анализируют ответы своих одноклассников.

Затем учащиеся получают задание по вариантам составить блок-схемы к решению неравенств $Ax > B$, $Ax < B$, $Ax \geq B$, $Ax \leq B$. В тетрадях записываем словесное описание алгоритма.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

На примере неравенства $Ax > B$, где x -неизвестное, A, B -выражения, зависящие только от параметров)

1. Если $A < 0$, то $x < \frac{B}{A}$.

Решением неравенства являются все числа из промежутка $(-\infty; \frac{B}{A})$.

2.а) Если $A = 0$, $B < 0$

$0 \cdot x > B$, x -любое число.

Решением неравенства является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

б) Если $A = 0$, $B = 0$

$0 \cdot x > 0$, решений нет.

в) Если $A = 0$, $B > 0$

$0 \cdot x > B$, решений нет.

3. Если $A > 0$, то $x > \frac{B}{A}$.

Решением неравенства является промежуток $(\frac{B}{A}; +\infty)$.

Так как учащиеся еще не знакомы с методом интервалов, то выбор заданий по этой теме весьма ограничен. На этом этапе работы будет достаточно, если школьники усвоят решение простейших ключевых неравенств.

16. Решить неравенство $(m-1)x < 5m$.

Решение:

1. Если $m-1 < 0$, $m < 1$, то $x > \frac{5m}{m-1}$.

2. Если $m-1=0$, $m=1$, получим

$$0 \cdot x < 5, \text{ } x\text{-любое число.}$$

3. Если $m-1>0$, $m>1$, то $x < \frac{5m}{m-1}$.

Ответ: при $m<1$, $x > \frac{5m}{m-1}$;

при $m=1$, x -любое число;

при $m>1$, $x < \frac{5m}{m-1}$.

Несущественно, будут ли значения m и x записаны в форме неравенства или промежутка.

17. $2ax+5>a+10x$,

$$2ax-10x>a-5,$$

$$(2a-10)x>a-5,$$

$$2(a-5)x>a-5.$$

1. Если $2(a-5)<0$, $a-5<0$, $a<5$, то $x < \frac{a-5}{2(a-5)}$; $x < \frac{1}{2}$.

2. Если $2(a-5)=0$, $a-5=0$, $a=5$, то

$$0 \cdot x > 0, \text{ решений нет.}$$

3. Если $2(a-5)>0$, $a-5>0$, $a>5$, то $x > \frac{a-5}{2(a-5)}$; $x > \frac{1}{2}$.

Ответ: при $a<5$, $x < \frac{1}{2}$;

при $a=5$, решений нет;

при $a>5$, $x > \frac{1}{2}$.

18. $mx-6 \leq 2m-3x$,

$$mx+3x \leq 2m+6,$$

$$(m+3)x \leq 2(m+3).$$

1. Если $m+3<0$, $m<-3$, то $x \geq \frac{2(m+3)}{m+3}$; $x \geq 2$.

2. Если $m+3=0$, $m=-3$, то

$$0 \cdot x \leq 0, x\text{-любое число.}$$

3. Если $m+3>0$, $m>-3$, то $x \leq \frac{2(m+3)}{m+3}$; $x \leq 2$.

Ответ: при $m<-3$, $x \geq 2$;

при $m=-3$, x -любое число;

при $m>-3$, $x \leq 2$.

Формальное решение неравенств 17, 18 приводит к распространенной ошибке, которая сводится к делению левой и правой частей неравенства на выражение, содержащее переменную, а это приводит к потере решений и коротким ответам.

Неправильно: $x(m+3) \leq 2(m+3)$, $x \leq 2$.

19. $5x-a > ax-3$.

Ответ: при $a<5$, $x > \frac{3-a}{a-5}$;

при $a=5$, решений нет;

при $a>5$, $x < \frac{3-a}{a-5}$.

Задачи для самостоятельного решения

20. При каких значениях a уравнение $1+3x-ax=2+x$ имеет отрицательный корень?

21. При каких значениях a уравнение $a(3x-a)=6x-4$ имеет одно положительное решение?

22. При каких значениях a уравнение $a(x-1)=x-2$ имеет решение, удовлетворяющее условию $x>1$?

Когда изучены системы линейных уравнений, можно решить такие задачи.

23. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x+y=a, \\ 2x+y=3 \end{cases}$ имеет решение

$x<0$, $y>0$?

24. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x+3y=2a-1, \\ x-y=a \end{cases}$, имеет

решение $x>0, y<0$?

25. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} 3x-y=1-a, \\ x+y=2a+1 \end{cases}$, имеет

решение $x\geq 1, y\leq 4$?

Системы 23, 24, 25 решаются подстановкой.

Если учащиеся 8 класса научены решать неравенства с модулем, то полезны такие упражнения.

26. Для каждого значения a решите неравенство:

а) $|x-3|<a$;

б) $|x-2|\leq a$;

в) $|x+5|>a$;

г) $|3-2x|\geq a$.

27. При каких значениях a неравенство справедливо при любом значении x :

а) $|x|>a$

б) $|x|+2a-1\geq 0$

в) $a|x|-1<0$

г) $2|3-5x|+2-3a>0$

Интересны для учащихся, увлекающихся математикой, нестандартные задачи, решение которых требует хорошего знания теории.

28. При каких a уравнение $ax=a^2$ равносильно неравенству $|x-3|\geq a$?

Решение: Решим уравнение $ax=a^2$.

1. Если $a\neq 0$, то $x=\frac{a^2}{a}=a$,

уравнение имеет один корень: $x=a$.

2. Если $a=0$, то $0\cdot x=0$, x -любое число,

уравнение имеет бесконечное множество решений.

Решим неравенство $|x-3| \geq a$.

1. Если $a \leq 0$, то x -любое число.

2. Если $a > 0$, то $x \leq 3-a$ или $x \geq a+3$.

Решением неравенства является объединение двух промежутков.

Следовательно, требованию задачи удовлетворяет только $a=0$.

29. При каких a неравенство $2x+a>0$ является следствием неравенства $x+1-3a>0$?

Решение: Решим неравенство $2x+a>0$; $x>-\frac{a}{2}$, $x+1-3a>0$, $x>3a-1$.

По условию, множество решений неравенства $x>-\frac{a}{2}$ должно содержать множество решений неравенства $x>3a-1$. Это требование выполняется, если $-\frac{a}{2} \leq 3a-1$, т.е. $a \geq \frac{2}{7}$.

30. При каких a неравенство $x>a$ является следствием неравенства $|x|<a$?

Решение: Решим неравенство $|x|<a$.

Если $a \leq 0$, то решений нет.

Если $a > 0$, то $-a < x < a$.

Очевидно, что при $a > 0$ рассматриваемые неравенства не имеют ни одного общего решения.

При $a \leq 0$ неравенство $|x|<a$ не имеет решений, а неравенство $x>a$, играющее роль неравенства–следствия, имеет решения. Это нас устраивает.

31. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} ax+1>0, \\ x+a>0 \end{cases}$

имеет хотя бы одно решение?

Решение:

1. При $a > 0$ данная система равносильна системе $\begin{cases} x>-\frac{1}{a}, \\ x>-a \end{cases}$,

Решением системы является интервал $(x_1; +\infty)$, где x_1 - наибольшее из чисел $-\frac{1}{a}$ и $-a$.

2. При $a=0$
$$\begin{cases} 0 \cdot x + 1 > 0, \\ x + 0 > 0 \end{cases}.$$

Решением системы является интервал $(0; +\infty)$.

3. При $a < 0$ система равносильна системе
$$\begin{cases} x < -\frac{1}{a}, \\ x > -a \end{cases}.$$

Эта система имеет решение, если $-a < -\frac{1}{a}$. Решим это неравенство с учетом условия $a < 0$. Получим $a^2 < 1$, $|a| < 1$, $-1 < a < 0$ (см. условие).

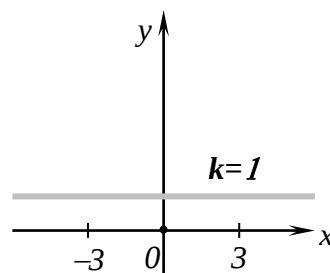
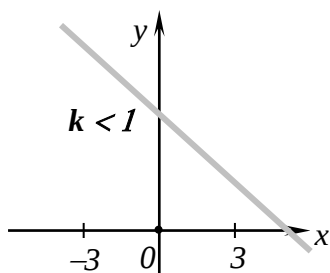
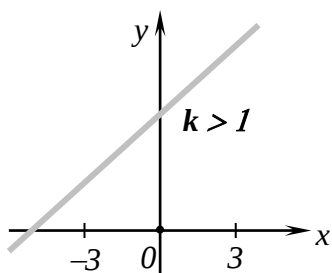
4. Объединим найденные значения a в каждом из рассмотренных случаев.

В заключение рассмотрим пример решения линейного неравенства при некоторых начальных условиях.

32. При каких значениях k неравенство $(k-1)x + 2k + 1 > 0$ верно при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| \leq 3$?

Решение:

Рассмотрим функцию $y = (k-1)x + 2k + 1$. Она является линейной при любом действительном значении k , т.е. графиком ее служит прямая.



Для выполнения неравенства на всем отрезке $[-3; 3]$ достаточно выполнения условия $y \begin{cases} y(-3) > 0, \\ y(3) > 0 \end{cases}$

$$y(-3) = -3(k-1) + 2k + 1 = 4 - k,$$

$$y(3) = 3(k-1) + 2k + 1 = 5k - 2.$$

$$\begin{cases} 4-k>0, \\ 5k-2>0 \end{cases} \begin{cases} k<4, \\ k>0,4 \end{cases}, \quad 0,4<k<4.$$

К обязательным результатам по этой теме относится умение решать задачи типа 16, 17, 18, 23, 24, поэтому контролирующие работы составляются с учетом этого требования.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

20. Ответ: при $a>2$.

21. Ответ: при $a>-2$, $a \neq 2$.

22. Ответ: при $a<1$.

23. Ответ: при $a>3$.

24. Ответ: при $\frac{1}{5} < a < 1$.

25. Ответ: при $a=2$.

26. Ответ:

а) при $a>0$, $3-a < x < 3+a$; при $a \leq 0$ решений нет.

б) при $a=0$, $x=2$; при $a>0$, $2-a \leq x \leq 2+a$.

в) при $a<0$, x -любое число; при $a=0$, $x \neq -5$; при $a>0$, $x < -a-5$ или $x > a-5$.

г) при $a \leq 0$, x -любое число; при $a>0$, $x \leq \frac{3-a}{2}$ или $x \geq \frac{3+a}{2}$.

27. Ответ: а) $a<0$; б) $a \geq \frac{1}{2}$; в) $a \leq 0$; г) $a < \frac{2}{3}$.

28. Ответ: $a=0$.

29. Ответ: $a \geq \frac{2}{7}$.

30. Ответ: $a \leq 0$.

31. Ответ: $a > -1$

32. Ответ: $0,4 < k < 4$.

Квадратные уравнения параметрам

Основная цель: научить учащихся исследовать квадратные уравнения; ознакомить их с применениями теоремы Виета и теоремы, обратной ей.

Задачи, связанные с квадратными уравнениями, встречающиеся в школьной практике, чрезвычайно разнообразны.

Теория решения квадратного уравнения должна быть изложена достаточно полно по требованию программы. Однако для того, чтобы облегчить учащимся решение многих задач, необходимо дополнить теоретический материал. (Все изложенные ниже дополнительные сведения сообщаются учащимся в процессе изучения соответствующей темы, снабжаются множеством простых примеров. Доказывать все свойства не обязательно.)

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Уравнение вида $Ax^2+Bx+C=0$, где x -неизвестное, A, B, C -действительные числа или выражения, зависящие только от параметров, причем $A \neq 0$, называется квадратным уравнением относительно x .

Допустимыми считаются такие значения параметров, при которых A, B и C имеют смысл.

$D=B^2-4AC$ -дискриминант квадратного уравнения.

Если $D<0$, то уравнение корней не имеет.

Если $D=0$, то уравнение имеет один корень кратности два: $x=-\frac{b}{2a}$.

(Замечание: Часто про квадратные уравнения с дискриминантом, равным нулю, и имеющим, соответственно, один корень, говорят, что оно имеет два совпадающих корня (?). Это связано с разложением многочлена на множители. Правильнее, на мой взгляд, что в этом случае нужно говорить и понимать "один корень кратности два".)

Если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $b=2k$, то $D_1=k^2-ac$;

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a}, \quad x_2 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a}.$$

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 -корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ (при условии $p^2 > 4q$)

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= -p; & x_1 \cdot x_2 &= q; \\ x_2-x_1 &= \sqrt{p^2-4q}; & x_1^2+x_2^2 &= p^2-2q. \end{aligned}$$

Свойства корней квадратного уравнения:

1. Если $D>0$, $a>0$, то уравнение имеет два действительных различных корня, знаки которых при $C>0$ одинаковы и противоположны знаку коэффициента b , а при $C<0$ разные, причем по абсолютной величине больше тот из корней, знак которого противоположен знаку b .

2. Если $D=0$, $a>0$, то уравнение имеет один корень кратности два, знак которого противоположен знаку b .

3. Если $D<0$, $a>0$, то корней нет.

Аналогично устанавливаются свойства корней и для $a<0$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Если в квадратном уравнении поменять местами коэффициенты a и c , то получим уравнение, корни которого обратны корням данного.

2. Если в квадратном уравнении поменять знак коэффициента b , то получим уравнение, корни которого противоположны корням данного.

3. Если в квадратном уравнении коэффициенты a и c разных знаков, то оно имеет действительные корни.

4. Если $a > 0$, $D = 0$, то левая часть квадратного уравнения есть полный квадрат, и наоборот, если левая часть уравнения есть полный квадрат, то $a > 0$, $D = 0$.

При изучении неполных квадратных уравнений в устную и письменную работу полезно включать такие задания:

33. При каких значениях m ровно один из корней уравнения равен нулю:

а) $3x^2 + x + 2m - 3 = 0$;

б) $x^2 - 2x + m^2 - 1 = 0$;

в) $2x^2 - mx + 2m^2 - 3m = 0$;

г) $x^2 + (m + 3)x + |m| - 3 = 0$.

34. При каких значениях m корни уравнения равны по модулю, но противоположны по знаку:

а) $x^2 + (3m - 5)x - 2 = 0$;

б) $2x^2 - (5m - 3)x + 1 = 0$;

в) $3x^2 + (m^2 - 4m)x + m - 1 = 0$;

г) $4x^2 + (5|m| - 1)x + 3m^2 + m = 0$.

35. При каких значениях m корень уравнения кратности два равен нулю:

а) $3x^2 - (m - 1)x - 1 - m^2 = 0$;

б) $x^2 - (3m^2 + 4m)x + 9m^2 - 16 = 0$;

в) $2x^2 + (3m^2 - |m|x) - m^3 - 3m = 0$;

г) $x^2 + (16 - m^4)x + m^3 + 8 = 0$.

36. Решите уравнение:

а) $x^2 + a = 0$;

б) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

в) $a^2x^2 - 4 = 0$;

г) $a(x^2 - 6x + 9) + 4 = 0$.

К основным знаниям и умениям по этой теме относится умение решать полные квадратные уравнения.

Особенность решения этих уравнений заключается не только в том, что с изменением параметра у них меняются числовые коэффициенты, но и в том, что могут измениться важнейшие характеристики всего уравнения.

Начинать "общаться" с квадратными уравнениями следует с класса задач, где за счет параметра на переменную накладываются какие-либо искусственные ограничения. Для таких задач характерны следующие формулировки: при каком значении параметра уравнение имеет один корень, два корня, не имеет корней.

Обычно такие задачи не вызывают трудностей. Основное, что требуется от учащегося – это внимательность к формулировке.

37. При каких значениях параметра c уравнение $5x^2 - 4x + c = 0$:

- а) имеет действительные различные корни;
- б) имеет один корень кратности два;
- в) не имеет действительных корней?

Решение:

$$D_1 = 4 - 5c$$

а) Если $D_1 > 0$, $4 - 5c > 0$, $5c < 4$, $c < 0,8$, то уравнение имеет два различных корня;

б) Если $D = 0$, $4 - 5c = 0$, $c = 0,8$, то уравнение имеет один корень кратности два;

в) Если $D < 0$, $4 - 5c < 0$, $5c > 4$, $c > 0,8$, то уравнение не имеет корней.

Ответ: а) $c < 0,8$; б) $c = 0,8$; в) $c > 0,8$.

При работе с этим уравнением акцентируем внимание на следующих вопросах:

1. Какова степень уравнения?
2. Зависит ли степень уравнения от значения параметра c ?

Далее усложняем задачу, предлагая уравнения, в которых коэффициент при второй степени неизвестной зависит от параметра.

38. При каких значениях a уравнение $ax^2 + 2x + 1 = 0$ имеет два различных корня?

Решение:

1) Данное уравнение является квадратным относительно x при $a \neq 0$.

(Комментарий: первоначально учащиеся формулируют определение квадратного уравнения).

2) Уравнение имеет различные корни, когда его $D_1 > 0$.

$$D_1 = 1 - a, \quad 1 - a > 0, \quad a < 1.$$

3) При $a = 0$ получается уравнение $2x + 1 = 0$, имеющее один корень.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

Формулируем правило:

Если коэффициент при x^2 многочлена второй степени содержит параметр, необходимо разбирать случай, когда он обращается в нуль.

Опять с уравнением работаем очень подробно, обсуждая каждую деталь решения.

39. Найти все значения параметра a , для которых квадратное уравнение

$$(a+1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$$

а) имеет два различных корня;

б) не имеет корней;

в) имеет один корень.

Решение:

(Комментарий: Несколько раз прочесть формулировку, сравнить с предыдущим заданием, найти отличие в формулировках).

1) Так как по условию уравнение квадратное, то $a+1 \neq 0$, $a \neq -1$.

(Вывод: Из решения следует исключить это число).

$$2) D_1 = (a+1)^2 - (a+1)(a-2) = 12(a+1).$$

а) Если $D_1 > 0$, $a+1 > 0$, $a > -1$, то уравнение имеет два различных корня;

б) Если $D_1 < 0$, $a+1 < 0$, $a < -1$, то уравнение не имеет корней;

в) Уравнение имеет один корень, если $D_1 = 0$, $a+1 = 0$, $a = -1$, но $a \neq -1$ (из п.1), следовательно, решений нет.

Ответ: а) $a > -1$; б) $a < -1$; в) решений нет.

40. При каких a уравнение $ax^2 - x + 3 = 0$ имеет единственное решение?

(Комментарий: Обсуждаем, какие из известных нам типов уравнений имеют один корень; каким может быть это уравнение в зависимости от a ; определен ли в условии задачи тип уравнения).

Решение:

1) Если $a = 0$, $-x + 3 = 0$, $x = 3$, то уравнение имеет один корень.

1) Если $a \neq 0$, то уравнение имеет один корень, когда $D = 0$.

$$D = 1 - 12a, 1 - 12a = 0, a = \frac{1}{12}.$$

Ответ: $a = 0$, $a = \frac{1}{12}$.

Задачи 36 -39 являются ключевыми по этому вопросу.

В классе и для домашней работы можно предложить такие задачи:

41. При каких значениях параметра b уравнение $x^2 + bx + 4 = 0$:

а) имеет один из корней, равный 3;

б) имеет различные корни;

в) имеет один корень;

г) не имеет корней?

42. При каких значениях параметра b корни уравнения $4x^2 + (3b^2 - 5|b| + 2)x - 3 = 0$ равны по модулю?

Ответ: $\pm \frac{2}{3}$; ± 1 .

43. Найдите наибольшее целое значение k , при котором уравнение $x^2 + x - k = 0$ не имеет корней.

44. При каком значении a уравнение:

а) $ax^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$; б) $(a+2)x^2 + 2(a+2)x + 2 = 0$

имеет один корень?

Ответ: а) $-\frac{1}{7}$; 0; б) 0.

45. При каких значениях a уравнение $(a^2-6a+8)x^2+(a^2-4)x+(10-3a-a^2)=0$ имеет более двух корней?

Ответ: 2.

46. Докажите, что при любом значении k уравнение $3y^2-ky-2=0$ имеет два корня.

47. Докажите, что не существует такого значения m , при котором уравнение $x^2-mx+m-2=0$ имело бы один корень.

По опыту работы, только после усвоения учащимися вопроса исследования квадратного уравнения есть смысл переходить к задаче: решить уравнение.

48. Решить уравнение $x^2+5ax+4a^2=0$.

Решение:

1) Коэффициент при x^2 равен 1, следовательно, уравнение квадратное.

2) Найдем дискриминант: $D=(5a)^2-4 \cdot 1 \cdot 4a^2=25a^2-16a^2=9a^2$.

а) При $a \neq 0$, $D>0$: уравнение имеет два корня $\sqrt{D} = |3a|$:

$$x_{1,2} = \frac{-5a \pm |3a|}{2}.$$

(Комментарий: В этом месте решения возникает техническая сложность, связанная с раскрытием модуля. Несколько раз следует подробно записать нахождение корней.)

$$\text{Если } a>0, \quad x_1 = \frac{-5a-3a}{2} = -4a, \quad x_2 = \frac{-5a+3a}{2} = -a.$$

$$\text{Если } a<0, \quad x_1 = \frac{-5a+3a}{2} = -a, \quad x_2 = \frac{-5a-3a}{2} = -4a.$$

Т.е. при $a>0$ и $a<0$ корни уравнения выражаются через a одинаково.

$$\text{б) При } a=0, \quad D=0: \quad x = \frac{-5a}{2} = \frac{-5 \cdot 0}{2} = 0.$$

Ответ: при $a \neq 0$ $x_1=-4a$, $x_2=-a$;

при $a=0$ $x=0$.

Комментарий: Ответ можно выписать, не выделяя случай $a=0$: при любых a $x_1=-4a$, $x_2=-a$; но я предпочитаю выделять случай равенства дискриминанта нулю, т.к. такая запись снимает вопрос о количестве корней в зависимости от a .

49. Решить уравнение $ax^2+2x+1=0$.

Решение:

Первоначально рассмотрим случай, когда первый коэффициент равен нулю.

1) Если $a=0$, $2x+1=0$, $x=-0,5$, то уравнение линейное, имеет один корень.

2) Если $a \neq 0$, то имеем квадратное уравнение. Найдем D_1 . $D_1=1-a$.

а) Если $D_1>0$, $1-a>0$, $a<1$, $a \neq 0$, уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}.$$

б) Если $D_1=0$, $a=1$, то уравнение имеет один корень: $x = \frac{-1}{a} = -1$.

в) Если $D_1<0$, $1-a<0$, $a>1$, то уравнение не имеет корней.

Ответ: при $a<1$, $a \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$;

при $a=0$ $x=-0,5$;

при $a=1$ $x=-1$;

при $a>1$ корней нет.

Разбираем еще одно аналогичное уравнение (можно пригласить ученика к доске).

50. $ax^2 - x + 3 = 0$.

Ответ: при $a < \frac{1}{12}$, $a \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-12a}}{2a}$;

при $a=0$ $x=3$;

при $a = \frac{1}{12}$ $x=6$;

при $a > \frac{1}{12}$ корней нет.

51. $(a+1)x^2 - 2x + 1 - a = 0$.

Теперь учащиеся готовы к составлению алгоритма.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

$Ax^2 + Bx + C = 0$

1. Несколько раз прочитать формулировку задачи. Выяснить, зависит ли степень уравнения от параметра. Если требуется, найти ОДЗ параметра.

2. Найти значения параметра, при которых $A=0$. Решить линейное уравнение.

3. Решить квадратное уравнение.

а) Определить, при каких значениях параметра $D > 0$. Найти корни по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

б) Определить, при каких значениях параметра $D = 0$. Найти корень по формуле $x = \frac{-b}{2a}$.

в) Определить, при каких значениях параметра $D < 0$, корней нет.

4. Исключить из п. 3 а), б), в) значения параметра из п. 1, 2.

5. Записать ответ.

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ

51. Решить уравнение $a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0$.

Решение:

1) $a(a+3)=0$ при $a=0$, $a=-3$.

а) Если $a=0$, получим $6x-9=0$,

$$6x=9,$$

$$x=1,5.$$

б) Если $a=-3$, получим $0 \cdot x + 9 - 9 = 0$,

$$0 \cdot x = 0,$$

x -любое число.

2) $a(a+3) \neq 0$ при $a \neq 0$, $a \neq -3$.

$$a(a+3)x^2 + 2(a+2)x - 3(a+3) = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $a+3 \neq 0$, получим

$$ax^2 + 2x - 3 = 0, \quad D_1 = 1 + 3a.$$

а) $D_1 > 0$, если $1 + 3a > 0$, $a > -\frac{1}{3}$, $a \neq 0$.

Уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3a}}{a}.$$

б) $D_1 = 0$, если $1 + 3a = 0$, $a = -\frac{1}{3}$.

Уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{-1}{-\frac{1}{3}} = 3.$$

в) $D_1 < 0$, если $1 + 3a < 0$, $a < -\frac{1}{3}$, $a \neq -3$.

Уравнение не имеет корней.

Ответ: при $a < -\frac{1}{3}$, $a \neq -3$ корней нет;

при $a=-3$ x -любое число;

при $a > -\frac{1}{3}, a \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3a}}{a}$;

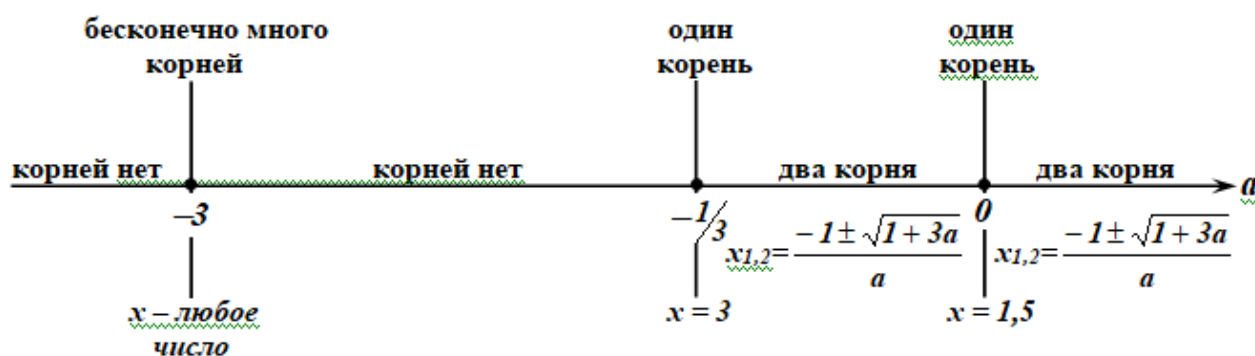
при $a = -\frac{1}{3}, x=3$;

при $a=0, x=1,5$.

Комментарий: Довольно часто запись ответа вызывает затруднения. Вот один из возможных способов действий, использующий ось параметра a :

1) Нанести на ось параметра a все значения, которые "встретились" при решении;

2) Указать значения (или число) корней в каждом промежутке и отдельных точках.



Уравнения 47, 48, 51 – ключевые.

Задачи для самостоятельного решения

53. Решите уравнение:

а) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$;

б) $x^2 - bx - 2b^2 = 0$;

в) $x^2 + 5bx - 6b^2 = 0$.

54. Решите уравнение:

а) $x^2 - (2a - 4)x - 8a = 0$;

б) $x^2 + (3b - 2)x - 6b = 0$;

в) $x^2 - (3a - 2)x + 2a^2 - a - 3 = 0$;

г) $x^2 - 4bx + 3b^2 - 4b - 4 = 0$.

55. Решите уравнение:

а) $ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$;

б) $mx^2 - 6x + 1 = 0$.

Выбор задач ограничен тем, что восьмиклассники не умеют решать квадратные неравенства.

Желательно на этом этапе провести проверочную работу, в которую включить задания типа 37, 39, 47, 48.

При наличии времени можно рассмотреть три интересные задачи, решение которых усложнено рассмотрением области допустимых значений параметра и неизвестного.

56. Решить относительно x $\frac{x}{m(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-m^2}{m(x+1)(x+2)}$.

Решение:

1) ОДЗ: $x \neq -2$, $x \neq -1$,

$m \neq 0$.

2) Умножим обе части уравнения на $m(x+1)(x+2) \neq 0$, получим квадратное уравнение (преобразования самостоятельно):

$$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0.$$

3) Найдем D_1 .

$$D_1 = (m-1)^2 - (m^2 - 2m - 3) = 4.$$

$D_1 > 0$, значит, уравнение имеет два различных корня при любом m .

$$x_1 = m - 1 - 2 = m - 3; \quad x_2 = m - 1 + 2 = m + 1.$$

4) Найдем значения m , при которых значения x_1, x_2 равны $-2, -1$.

а) $x_1 = -2$, если $m - 3 = -2$, $m = 1$; при $m = 1$ $x_2 = 2$;

б) $x_1 = -1$, если $m - 3 = -1$, $m = 2$; при $m = 2$ $x_2 = 3$;

в) $x_2 = -2$, если $m + 1 = -2$, $m = -3$; при $m = -3$ $x_1 = -6$;

г) $x_2 = -1$, если $m + 1 = -1$, $m = -2$; при $m = -2$ $x_1 = -5$.

Ответ: при $m \neq 0$, $m \neq -3$, $m \neq \pm 2$, $m \neq 1$ $x_1 = m - 3$; $x_2 = m + 1$;

при $m = 0$ уравнение не имеет смысла;

при $m=-3$ $x=-6$;

при $m=-2$ $x=-5$;

при $m=1$ $x=2$;

при $m=2$ $x=3$.

57. Для каждого значения параметра a решить уравнение:

$$\frac{(x-4)(x+a)}{x^2 - (2a-2)x - 2a + 1} = 0.$$

(обратите внимание, что в задачах 55, 56 одно требование, но сформулировано оно по-разному)

Решение:

1) Данное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} (x-4)(x+a) = 0 \\ x^2 - (2a-2)x - 2a + 1 \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

2) Решим квадратное уравнение (2),

$$D_1 = (a-1)^2 - (-2a+1) = a^2 - 2a + 1 + 2a - 1 = a^2.$$

а) $D_1 \geq 0$ при любых a ; $x_1 = a - 1 - a = -1$, $x_2 = a - 1 + a = 2a - 1$.

3) Тогда система принимает следующий вид:
$$\begin{cases} \begin{cases} x = 4, \\ x = -a, \end{cases} \\ x \neq -2 \\ x \neq 2a - 1 \end{cases}$$

4) Исключим те значения a , при которых
$$\begin{cases} 2a - 1 = 4, \\ -a = -1, \\ -a = 2a - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2,5, \\ a = 1, \\ a = \frac{1}{3} \end{cases} ;$$

$$-a=4, \quad a=-4.$$

Ответ: при $a \neq -4$, $a \neq \frac{1}{3}$, $a \neq 1$, $a \neq 2,5$ $x_1=4$; $x_2=-a$;

при $a=-4$, $a=\frac{1}{3}$, $a=1$, $x=4$;

при $a=2,5$ $x=-2,5$.

58. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - ax + 1}{x + 3} = 0$ имеет единственное решение?

Решение:

1) Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3 \end{cases}$,

2) Уравнение имеет один корень, если

а) $D=0$, но $x \neq -3$.

$$D=0, a^2 - 4 = 0, a = \pm 2.$$

Проверка: если $a = -2$, $x^2 + 2x + 1 = 0$, $x = -1$.

если $a = 2$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$.

б) Если квадратное уравнение имеет два корня, один из которых равен -3 .

$$x_1 = -3, (-3)^2 - a \cdot (-3) + 1 = 0, 9 + 3a + 1 = 0; a = -\frac{10}{3}.$$

Найдем второй корень (самостоятельно): $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $a = -\frac{10}{3}$; $a = -2$; $a = 2$.

К азбуке квадратного уравнения относится и теорема Виета, позволяющая выяснить для уравнения, имеющего корни, их знаки, сравнить корни по модулю и т.п.

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

59. Решите уравнение.

а) $x^2 - 7ax + 12a^2 = 0$;

б) $x^2 + 5bx + 6b^2 = 0$;

в) $7x^2 - 4ax - 3a^2 = 0$;

г) $7x^2 + 13bx + 6b^2 = 0$;

д) $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a = 0$;

е) $x^2 - (4b - 2)x + 3b^2 - 2b = 0$.

Далее целесообразно решить серию несложных задач.

60. При каких k произведение корней квадратного уравнения $x^2+3x+(k^2-7k+12)$ равно нулю?

Ответ: 3; 4.

61. При каких значениях k сумма корней квадратного уравнения $x^2+(k^2+4k-5)x-k$ равна нулю?

Ответ: 1.

62. При каких значениях p и q корни уравнения $x^2+px+q=0$ равны $2p$ и $\frac{q}{2}$?

Ответ: $p=q=0$ или $p=1, q=-6$.

Более подробно следует остановиться на задачах такого содержания.

63. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2-2ax+4=0$ положительны?

Обсуждаем. Для того, чтобы оба корня уравнения были положительны, нужно, во-первых, чтобы оно имело два корня, а для этого необходимо, чтобы дискриминант был больше нуля. Во-вторых, так как свободный член положительный, то оба корня имеют одинаковые знаки, а поэтому, чтобы они имели знаки "плюс", нужно, чтобы коэффициент среднего члена был отрицательный.

Разбив требование задачи на указанные две части, мы разбиваем и саму задачу на две более простые:

1. При каких значениях a дискриминант уравнения положительный?

2. При каких значениях a коэффициент среднего члена уравнения отрицательный?

Решение:

$$D=a^2-4, a^2-4>0, a^2>4, |a|>2, a<-2 \text{ или } a>2.$$

$$-2a<0, a>0.$$

$$\begin{cases} a < -2 \\ a > 2 \end{cases}, a > 2. \\ a > 0$$

Ответ: $a>2$.

64. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - 4x + a = 0$ имеет:

а) положительные корни;

б) отрицательные корни;

в) корень, равный нулю?

Ответ: а) $0 < a \leq 2$; б) $-2 \leq a < 0$; в) $a = 0$.

65. В уравнении $x^2 + ax + 12 = 0$ определить a таким образом, чтобы разность корней равнялась единице.

Решение: $x_2 - x_1 = \sqrt{a^2 - 48} = 1, a = \pm 7$.

Ответ: $a = \pm 7$.

Разнообразны задачи с применением формул сокращенного умножения.

66. Корни уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ таковы, что $x_1^2 + x_2^2 = 112$. Найти a .

Решение:

$D = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2, D \geq 0$ при любых a .

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3a, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 \end{cases},$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (3a)^2 - 2a^2 = 7a^2 = 112; a^2 = 16, a = \pm 4.$$

Ответ: ± 4 .

67. В уравнении $3x^2 + ax + 2 = 0$ определить a таким образом, чтобы корни уравнения были действительными, а сумма кубов корней равнялась удвоенной сумме корней.

Решение:

$$D > 0, D = a^2 - 24;$$

$$a^2 - 24 > 0, a^2 > 24; |a| > 2\sqrt{6}.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a}{3}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) = -\frac{a}{3} \left(\frac{a^2}{9} - 2 \right).$$

$$-\frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{9}-2\right)=-\frac{2}{3}a; \quad a\left(\frac{a^2}{9}-4\right)=0; \quad a=0; \quad a=\pm 6.$$

$$|0|<2\sqrt{6}; \quad |\pm 6|>2\sqrt{6}.$$

Ответ: ± 6 .

68. Пусть x_1 и x_2 -корни уравнения $x^2+px+q=0$. Выразить $x_1^4+x_2^4$ через p и q .

Решение:

$$1) x_1+x_2=-p;$$

$$x_1 \cdot x_2=q.$$

$$\begin{aligned} 2) x_1^4+x_2^4 &= (x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2 = ((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2x_1^2x_2^2 = (p^2-2q)^2-2q^2 = \\ &= p^4-4p^2q^2+2q^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } p^4-4p^2q^2+2q^2.$$

69. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m-1)x+m^2-1,5=0$ наибольшая?

$$\text{Ответ: } -1.$$

70. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-m)x+m-3=0$ наименьшая?

$$\text{Ответ: } 1.$$

Учащиеся должны самостоятельно уметь решать задачи типа 59, 62,

65. Задачи такого типа целесообразно включать как обязательный материал в текущие самостоятельные и контрольные работы.

Итоги работы за год покажет большая проверочная работа, в которую включены задачи, аналогичные ключевым по всем темам.

9 класс

Основная цель работы в 9 классе – просто изучить квадратный трехчлен и квадратные неравенства. Учащиеся 9 класса уже готовы к серьезной исследовательской работе, поэтому излагать новый материал можно в виде проблемного диалога между учениками и учителем.

Квадратичная функция и ее график

При изучении графиков функций $y=ax^2+n$ и $y=a(x-m)^2$ в устную и письменную работу полезно включать задачи такого содержания.

71. Найдите количество целых значений a , при которых абсцисса и ордината вершины параболы $y=(x-5-a)^2+3-a$ положительны.

Решение: $y=(x-(5+a))^2+3-a$; $x_0=5+a$; $y_0=3-a$.

$$\begin{cases} 5+a > 0, \\ 3-a > 0; \end{cases} \begin{cases} a > -5, \\ a < 3; \end{cases} \quad -5 < a < 3.$$

Целые значения a : -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 .

Ответ: 7.

Изучая график квадратного трехчлена, рассматриваем следующие задачи:

72. При каких m парабола $y=mx^2-4mx+35$ касается оси абсцисс?

Решение: Парабола касается оси абсцисс, если дискриминант равен 0

$$D_1=(2m)^2-m \cdot 35=4m^2-35m=4m \left(m-\frac{35}{4}\right);$$

$$\begin{cases} m \neq 0, \\ 4m \left(m-\frac{35}{4}\right)=0; \end{cases} \begin{cases} m \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{35}{4} \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{35}{4}$.

Замечание. При решении таких задач следует всякий раз акцентировать внимание на том факте, что значение первого коэффициента не должно обращаться в ноль.

73. Найдите значения a и b , при которых точка $(1; 1)$ является вершиной параболы $y=ax^2+bx+8$.

Решение: Если точка $(x_0; y_0)$ -вершина параболы, то $x_0=-\frac{b}{2a}$; $y_0=y(x_0)$.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=1, \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 8 = 0; \end{cases} \begin{cases} b = -2a, \\ a - 2a + 8 = 1; \end{cases} \begin{cases} b = -14, \\ a = 7; \end{cases}$$

Ответ: $a=7; b=-14$.

Очень содержательными, по-настоящему развивающими исследовательские навыки являются задачи типа:

74. Известно, что парабола $y=ax^2+bx+c$ не пересекает ось Ox и $a+b+c < 0$.

Определить знаки a и c .

Прежде, чем записать решение задачи, рассмотрим утверждения:

1. Если парабола не пересекает ось Ox , то она полностью лежит или над осью, или под осью, то есть при всех x принимает значения одного знака.
2. Значение функции при $x=0$ равно ее свободному члену, т.е. $y(0)=c$.
3. Значение функции при $x=1$ равно сумме коэффициентов $y(1)=a+b+c$.

Решение:

1) $y(1)=a+b+c$. Так как $a+b+c < 0$, то $y(1) < 0$.

2) Функция принимает значения одного знака, следовательно $y < 0$ при всех x , т. е. парабола лежит под осью Ox , таким образом $a < 0$, $y(0) < 0$, $c < 0$.

Ответ: $a < 0; c < 0$.

75. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней, а его коэффициенты связаны условием $a - b + c < 0$. Определить знак числа c .

Решение:

$D < 0$, следовательно $y > 0$ или $y < 0$ для всех x .

$y(-1)=a - b + c$. Так как $a - b + c < 0$, то $y(-1) < 0$, таким образом $y < 0$ для всех x .

$c=y(0)$; $y(0) < 0$, значит $c < 0$.

Ответ: $c < 0$.

76. Известно, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней и $a+c<b$. Определить знак c .

Решение: совпадает с решением задачи 76.

Ответ: $c<0$.

Пока девятиклассники не научились решать квадратные неравенства, им предлагаются задачи простые по технике решения. Важно, чтобы ученики могли грамотно проанализировать условие и вопрос задачи и правильно составить соответствующую систему.

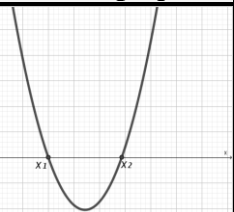
Квадратные неравенства

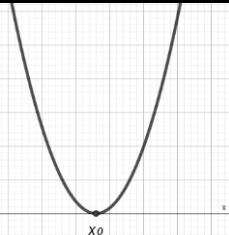
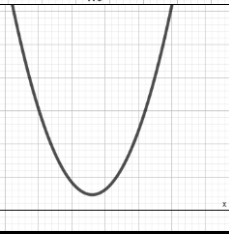
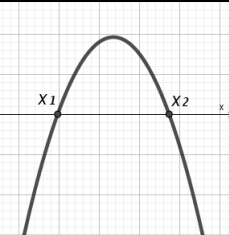
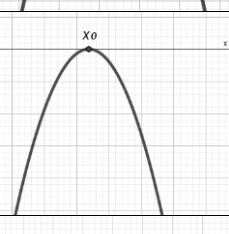
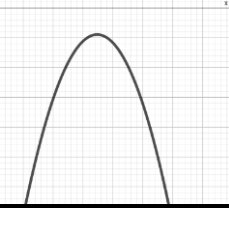
Решение квадратных неравенств с параметрами – один из наиболее сложных вопросов 9 класса. Задачи очень разнообразны по формулировкам и порой достаточно трудоемки, объемны по записи решения, поэтому уже на первых уроках изучения темы "Решение неравенств второй степени с одной переменной" ученики составляют в тетради таблицу, которой активно пользуются сначала при решении числовых неравенств, а потом и неравенств с параметрами.

Изучив графический способ решения квадратных неравенств и рассмотрев примеры всех возможных типов, девятиклассники делают вывод, что возможны шесть случаев положения параболы относительно оси Ox . Факторы, влияющие на положение параболы-знак первого коэффициента и знак дискриминанта. Исследуем решение всех случаев.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

$f(x)>0(x)=Ax^2+Bx+C$, где A, B, C – некоторые числа или выражения, зависящие только от параметра, причем $A \neq 0$, x_1, x_2 -нули функции.

<i>A, D</i>	<i>Эскиз графика</i>	<i>$f(x)>0$</i>	<i>$f(x) \geq 0$</i>	<i>$f(x)<0$</i>	<i>$f(x) \leq 0$</i>
<i>A>0 D>0</i>		<i>$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$</i>	<i>$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$</i>	<i>$(x_1; x_2)$</i>	<i>$[x_1; x_2]$</i>

$A > 0$ $D = 0$		$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	решений нет	x_0
$A > 0$ $D < 0$		R знак значений функции совпадает со знаком a	R	решений нет	решений нет
$A < 0$ $D > 0$		$(x_1; x_2)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$A < 0$ $D = 0$		решений нет	x_0	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	R
$A < 0$ $D < 0$		решений нет	решений нет	R знак значений функции совпадает со знаком a	R

В первую очередь ученикам предлагаются неравенства, которые должны выполняться или не выполняться при всех действительных значениях x .

77. При каких значениях a неравенство $x^2 - (a+2)x + 8a+1 > 0$ выполняется для всех действительных значений x ?

Решение: Неравенство выполняется для всех x , если имеет решение

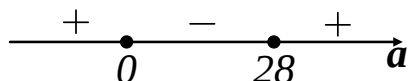
система
$$\begin{cases} A > 0, \\ D < 0; \end{cases}$$

1) $A = 1; 1 > 0$.

2) $D = (a+2)^2 + 4(8a+1) = a^2 + 4a + 4 - 32a - 4 = a^2 - 28a = a(a - 28)$.

$$3) a(a - 28) < 0$$

$$0 < a < 28.$$



Ответ: $(0; 28)$.

78. При каких значениях b квадратное неравенство $(4 - b)x^2 + 2(b+2)x - 1 > 0$ не имеет решений?

При разборе условия задачи ставим акцент на слове "квадратное". Обращаемся к таблице, находим в ней соответствующий случай. Выясняем, что имеется два случая: 1) $A < 0, D = 0$; 2) $A < 0, D < 0$, которые можно объединить.

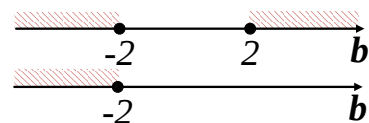
Решение: Неравенство не имеет решений, если имеет решение система

$$\begin{cases} A < 0, \\ D \leq 0; \end{cases}$$

$$1) A = 4 - b^2.$$

$$2) D_1 = (b+2)^2 - (4 - b^2) \cdot (-1) = b^2 + 4b + 4 - b^2 = 4b + 8$$

$$3) \begin{cases} 4 - b^2 < 0, \\ 4b + 8 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} b^2 - 4 > 0, \\ 4b \leq -8; \end{cases} \begin{cases} (b-2)(b+2) > 0, \\ b \leq -2; \end{cases}$$



$$b < -2$$

Ответ: $(-\infty; -2)$.

Перед тем, как рассматривать следующую группу задач, полезно обсудить с учениками упражнение:

При каких значениях a уравнение $ax^2 - x + 3 = 0$ имеет единственное решение?

Вспомнить, что при изменении параметра могут измениться и важнейшие характеристики уравнения.

79. Найти все значения r , при которых неравенство $(r^2 - 1)x^2 + 2(r - 1)x + 2 > 0$ является верным при всех $x \in R$.

При обсуждении выражения, стоящего в левой части, говорим, что при некоторых значениях r неравенство будет линейным.

Решение:

$$1) r^2 - 1 = 0 \text{ при } r = \pm 1.$$

а) если $r=-1$, то $4x+2>0$, $x<-0,5$, не удовлетворяет условию $x \in R$.

б) если $r=1$, то $0 \cdot x > -2$, $x \in R$.

$$2) r^2 - 1 \neq 0.$$

Неравенство выполняется для всех x , если имеет решение система $\begin{cases} A > 0, \\ D < 0 \end{cases}$

$$A = r^2 - 1;$$

$$D_1 = (r - 1)^2 - 2(r^2 - 1) = (r - 1)(r - 1 - 2(r+1)) = (r - 1)(-r - 3)$$

$$\begin{cases} r^2 - 1 > 0, \\ -(r-1)(r+3) < 0 \end{cases} \begin{cases} (r-1)(r+1) > 0, \\ (r-1)(r+3) > 0 \end{cases} \begin{cases} r < -3, \\ r > 1 \end{cases}$$

$$\text{С учетом п. 1 (б)} \begin{cases} r < -3, \\ r \geq 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$.

Для закрепления решаем задачи:

80. При каких значениях p функция $y = \sqrt{(3p+1)x - p(4+x^2)}$ определена при всех действительных значениях x ?

Решение: $-px^2 + (3p+1)x - 4p \geq 0;$

1) $-p=0$; $x \geq 0$ не удовлетворяет условию $x \in R$.

$$p \neq 0; \begin{cases} -p > 0, \\ (3p+1)^2 - 4p \cdot 4p \leq 0 \end{cases} \begin{cases} p < 0, \\ \left(p + \frac{1}{7}\right)(p-1) \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{7}]$.

82. При каких m неравенство $(m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2 < 0$ не имеет решений?

Ответ: $[2; +\infty)$.

83. При каких n неравенство $(2n^2 - 5n + 2)x^2 - 4nx + 2 > 0$ выполняется при всех x ?

Ответ: $(-\infty; 0,4)$.

84. При каких a квадратный трехчлен $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1$ принимает положительные значения для всех x ?

Ответ: $(1; +\infty)$.

При работе над этими задачами рекомендую выполнять графическую иллюстрацию, которая зачастую сразу помогает понять суть задачи.

Приступая к решению квадратных неравенств, говорим, что предыдущая группа – задачи с дополнительными условиями. Мы искали значения параметров, удовлетворяющих конкретным требованиям.

Если же следует решить неравенство, значит, оно должно быть рассмотрено при всех значениях параметра. Если хотя бы одно значение не исследовано, решение задачи не может быть признано полным. При решении неравенств используем таблицу, чтобы не пропустить все возможные случаи.

В 9 классе достаточно рассмотреть несколько примеров, где первый коэффициент не зависит от параметра.

Решить неравенства:

$$84. x^2 + 2x + a > 0$$

$$A=1, A>0;$$

$$D_1 = 1 - a;$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{1-a}; \quad x_2 = -1 + \sqrt{1-a};$$

$$1) D_1 > 0; \quad 1-a > 0; \text{ при } a < 1 \quad \begin{cases} x < -1 - \sqrt{1-a}, \\ x > -1 + \sqrt{1-a} \end{cases}$$

$$2) D_1 = 0; \quad 1-a = 0; \text{ при } a = 1 \quad x^2 + 2x + 1 > 0; (x+1)^2 > 0; \begin{cases} x < -1, \\ x > -1 \end{cases}$$

$$3) D_1 < 0; \quad 1-a < 0; \text{ при } a > 1 \quad x - \text{любое число.}$$

$$\text{Ответ: при } a \in (-\infty; 1) \quad x \in (-\infty; -1 - \sqrt{1-a}) \cup (-1 + \sqrt{1-a}; +\infty);$$

$$\text{при } a = 1 \quad x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty);$$

$$\text{при } a \in (1; +\infty) \quad x \in R.$$

Аналогичное неравенство:

$$85. x^2 + 3ax - a > 0$$

$D = 9a \left(a + \frac{4}{9}\right)$, поэтому следует рассмотреть случаи:

1) $D > 0$;

2) $D = 0$; а) $a = 0$; б) $a = -\frac{4}{9}$;

3) $D < 0$.

$$86. x^2 - 2ax + 2a^2 + 4a + 4 \leq 0$$

$$D_1 = -(a+2)^2;$$

1) $D > 0$; $-(a+2)^2 > 0$; таких a нет.

2) $D = 0$ при $a = -2$; $x^2 + 4x + 4 \leq 0$; $(x+2)^2 \leq 0$; $x = -2$.

3) $D < 0$ при $a \neq -2$; решений нет.

Ответ: при $a = -2$; $x = -2$;

при $a \neq -2$ решений нет.

$$87. -x^2 < ax + 1$$

$$x^2 + ax + 1 > 0;$$

$$A = 1; A > 0;$$

$$D = a^2 - 4;$$

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2};$$

1) $D > 0$; $a^2 - 4 > 0$ при $\begin{cases} a < -2, \\ a > 2 \end{cases} \quad x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty).$

2) $D = 0$; $a = \pm 2$; а) $a = -2$, $(x-1)^2 > 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

б) $a = 2$, $(x+1)^2 > 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

3) $D < 0$ при $-2 < a < 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: при $|a| < 2$; $x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ или $x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$;

при $|a| < 2$; $x \in \mathbb{R}$;

при $a = -2$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

при $a=2$; $x \in R \setminus \{-1\}$.

Используются различные формы записи решения неравенства, важным является приучить школьников к последовательности в решении и выписке ответа.

Ключевыми задачами этой темы являются задачи 71, 72, 78, 80, 85.

На этапах изучения можно предлагать самостоятельные работы из 1-2 задач, а по завершении темы, учитывая определенную ее сложность – домашнюю контрольную работу по ключевым задачам.

Расположение корней квадратного трехчлена на числовой оси

Изучение этого вопроса закладывает базу для решения тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных уравнений и неравенств с параметрами. Во многих случаях эти решения приводят к громоздким преобразованиям. В то же время использование свойств квадратичной функции позволяет существенно упростить решение.

Кроме того, решение многих задач с параметрами, предлагающихся на вступительных экзаменах в вузы, требует умения правильно формулировать необходимые и достаточные условия, связанные с расположением корней квадратного трехчлена относительно некоторых характерных точек.

Основное внимание уделено наглядности, обоснование утверждений существенно опирается на чертеж.

Пусть квадратный трехчлен

$f(x)=Ax^2+Bx+C$ имеет корни x_1 и x_2 ; $x_0=-\frac{B}{2A}$ –

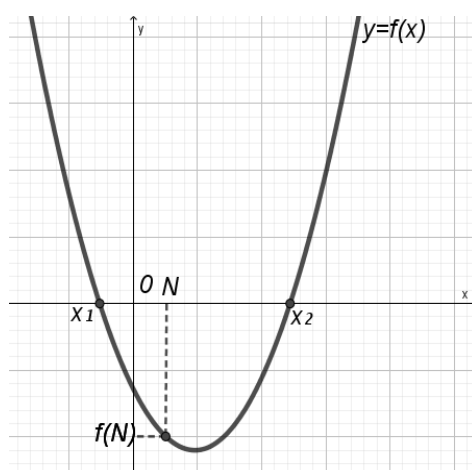
абсцисса вершины параболы; $D=B^2-4AC$ –

дискриминант квадратного трехчлена; $M, K, N,$

P – заданные числа.

Все чертежи приведены для $a>0$, случай $a<0$ рассматривается аналогично.

Утверждение 1. Для того, чтобы число N



было расположено между корнями квадратного трехчлена ($x_1 < N < x_2$), необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$A f(N) < 0$$

Доказательство:

$$N - x_1 > 0; \quad N - x_2 < 0;$$

$$(N - x_1)(N - x_2) < 0;$$

$$N^2 - x_1 N - x_2 N + x_1 x_2 < 0;$$

$$N^2 - (x_1 + x_2)N + x_1 x_2 < 0;$$

$$N^2 + \frac{B}{A}N + \frac{C}{A} < 0 \quad | \cdot A^2;$$

$$A(AN^2 + BN + C) < 0;$$

$$a \cdot f(N) < 0.$$

88. При каких m уравнение $x^2 - (2m+1)x + 3m - 4 = 0$ имеет два корня, один из которых меньше 2, а другой больше 2?

Решение: $A f(2) < 0;$

$$A=1; \quad f(2)=4 - (2m+1) \cdot 2 + 3m - 4 = -m - 2;$$

$$-m - 2 < 0; \quad m > -2.$$

Ответ: $m > -2.$

89. При каких m уравнение $mx^2 + (3m - 2)x + m - 3 = 0$ имеет корни разных знаков?

Эту задачу можно переформулировать так: при каких m число 0 лежит между корнями уравнения?

Решение: $A=m; \quad f(0)=m - 3;$

$$m(m - 3) < 0; \quad 0 < m < 3.$$

Ответ: $(0; 3).$

Замечание: Эту задачу можно решить и используя теорему Виета ($\frac{C}{A} < 0$).

90. При каких k один из корней уравнения $(k^2 - 2)x^2 + (k^2 + k - 1)x - k^3 + k^2 = 0$ меньше k , а другой больше k ?

Решение: $A=k^2 - 2;$

$$f(k) = (k^2 - 2)k^2 + (k^2 + k - 1)k - k^3 + k^2 = (k^2 - 2) \cdot ((k^2 - 2)k^2 + (k^2 + k - 1)k - k^3 + k^2) < 0;$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2} < k < 0, \\ 1 < k < \sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: $(-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2})$.

Утверждение 2. Для того, чтобы отрезок $[N; P]$ лежал в интервале $(x_1; x_2)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

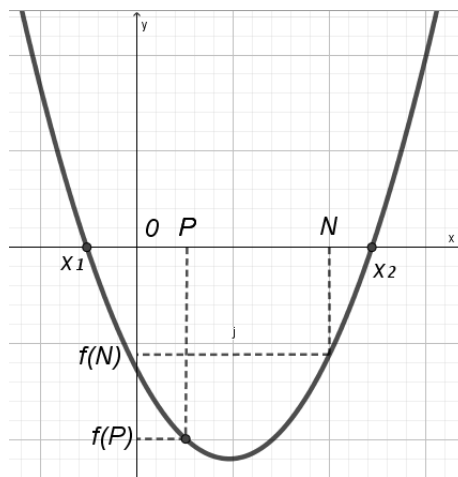
$$\begin{cases} A \cdot f(N) < 0, \\ A \cdot f(P) < 0 \end{cases}$$

91. При каких m корни уравнения $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + 3m = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < 2, x_2 > 4$?

Решение:

$$\begin{cases} (m-1) \cdot f(2) < 0, \\ (m-1) \cdot f(4) < 0 \end{cases} \begin{cases} (m-1)(3m-12) < 0, \\ (m-1)(11m-32) < 0 \end{cases} \begin{cases} 1 < m < 4, \\ 1 < m < \frac{32}{11} \end{cases} \quad 1 < m < \frac{32}{11}$$

Ответ: $\left(1; \frac{32}{11}\right)$



92. Найти все значения a , при которых неравенство $x^2 - 2(a - 3)x + a^2 - 6a < 0$ будет выполнено для любого x , принадлежащего интервалу $(0; 2)$.

Решение: Интервал $(0; 2)$ должен содержаться во множестве решений данного неравенства, следовательно, должно выполняться соотношение

$$x_1 \leq 0 < 2 \leq x_2$$

$$\begin{cases} f(0) \leq 0, \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \begin{cases} a^2 - 6a \leq 0, \\ 4 + 4(a - 3) + a^2 - 6a \leq 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq a \leq 6, \\ 2 \leq a \leq 8 \end{cases} \quad 2 \leq a \leq 6$$

Ответ: $[2; 6]$.

Утверждение 3. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше числа M ($x_1 \leq x_2 < M$), необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 < M, \\ A \cdot f(M) > 0 \end{cases}$$

Доказательство.

$$(x_1 - M) < 0; \quad (x_2 - M) < 0;$$

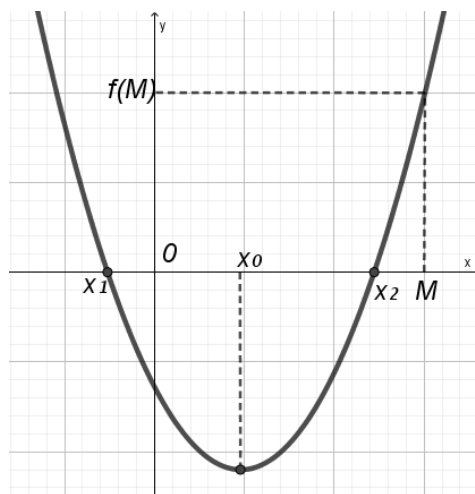
$$(x_1 - M)(x_2 - M) > 0;$$

$$M^2 - (x_1 + x_2)M + x_1 x_2 > 0;$$

$$M^2 + \frac{B}{A} \cdot M + \frac{C}{a} > 0 \quad | \cdot a^2;$$

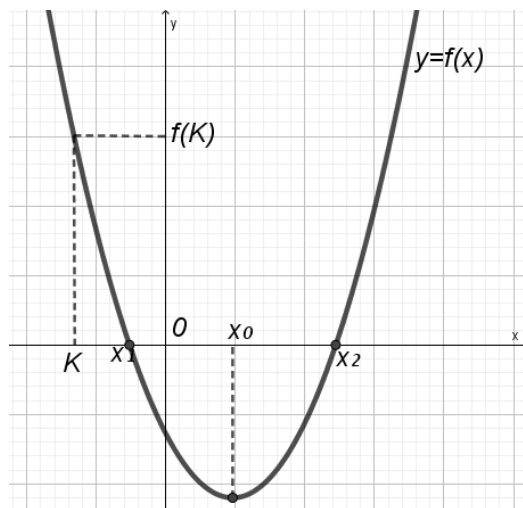
$$a(aM^2 + BM + C) > 0;$$

$$a f(M) > 0.$$



Утверждение 4. Для того, чтобы оба корня уравнения были больше числа K ($K < x_1 \leq x_2$), необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 > K, \\ A \cdot f(K) > 0 \end{cases}$$



93. При каких m все корни уравнения $x^2 - (3m+1)x + (2m^2+4m-6) = 0$

а) больше 1; б) меньше -1?

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 > 1, \\ f(1) > 0 \end{cases} \begin{cases} (3m+1)^2 - 4(2m^2 + 4m - 6) \geq 0, \\ \frac{1}{2}(3m+1) > 1, \\ 1 - (3m+1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0 \end{cases} \begin{cases} (m-5)^2 \geq 0, \\ m > \frac{13}{2}, \\ (2m-3)(m+2) > 0 \end{cases}$$

Решение: а)

$$\begin{cases} m - \text{любое число}, \\ m > \frac{1}{3}, \\ \begin{cases} m < -2 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \quad m > \frac{3}{2}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 < 1, \\ f(-1) > 0 \end{cases} \begin{cases} m - \text{любое число}, \\ (3m+1) < -1, \\ 1 + (3m+1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0 \end{cases} \quad m < -4$$

Ответ: а) $m > \frac{3}{2}$; б) $m < -4$.

Замечание: Если выражения для корней уравнения не содержат радикалов, то удобно решать примеры и без применения теорем. Так как корни $x_1 = m+3$, $x_2 = 2m-2$, то в случае

$$\text{а) } \begin{cases} m+3 > 1, \\ 2m-2 > 1 \end{cases} \quad m > \frac{3}{2}; \quad \text{б) } \begin{cases} m+3 > -1, \\ 2m-2 > -1 \end{cases}$$

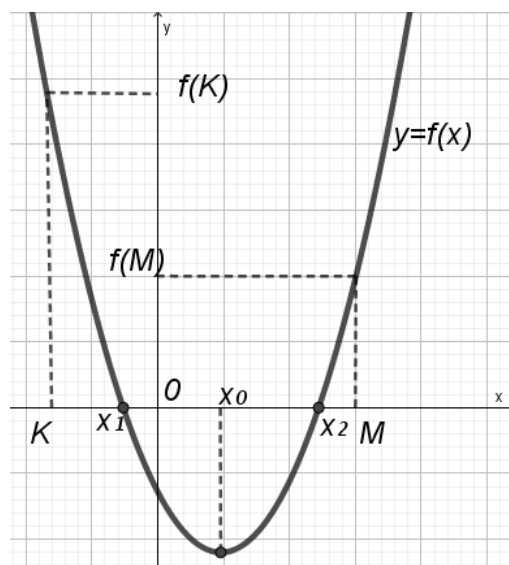
$m < -4$;

94. При каких a корни уравнения $ax^2 - (2a+1)x + 3a - 1 = 0$ больше 1?

Ответ: $\left(1; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right]$.

95. При каких p корни уравнения $x^2 + 4px + (1 - 2p + 4p^2) = 0$ меньше -1 ?

Ответ: $(1; +\infty)$.



96. При каких b корни уравнения $x^2 - 2x - b = 0$ меньше b ?

Ответ: $(3; +\infty)$.

Утверждение 5. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена лежали в интервале $(K; M)$, т. е. $K < x_1 \leq x_2 < M$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ K < x_0 < M, \\ A \cdot f(K) > 0, \\ A \cdot f(M) > 0 \end{cases}$$

97. Для каких значений m уравнение $4x^2 - 2x + m = 0$ имеет корни, заключенные между -1 и 1 ?

Решение:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -1 < x_0 < 1, \\ 4 \cdot f(-1) > 0, \\ 4 \cdot f(1) > 0 \end{cases} \begin{cases} 1 - 4m \geq 0, \\ -1 < \frac{1}{4} < 1, m > -6 \\ 4 + 2 + m > 0, \\ 4 - 2 + m > 0 \end{cases} \begin{cases} m \leq \frac{1}{4}, \\ -2 < m \leq \frac{1}{4}, \\ m > -2 \end{cases}$$

Ответ: $\left[-2; \frac{1}{4}\right]$.

98. При каких m корни уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 5 = 0$ по модулю не превосходят 4 ?

Условие задачи можно сформулировать следующим образом: при каких m

$$-4 \leq x_1 \leq x_2 \leq 4?$$

Решение:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -4 < x_0 < 4, \\ f(-4) \geq 0, \\ f(4) \geq 0 \end{cases} \begin{cases} m^2 - (m^2 - 2m + 5) \geq 0, \\ -4 \leq m \leq 4, \\ 16 + 8m + m^2 - 2m + 5 \geq 0, \\ 16 - 8m + m^2 - 2m + 5 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} m \geq \frac{5}{2}, \\ -4 \leq m \leq 4, \\ m^2 + 6m + 21 \geq 0, \\ m^2 - 10m + 21 \geq 0 \end{cases}$$

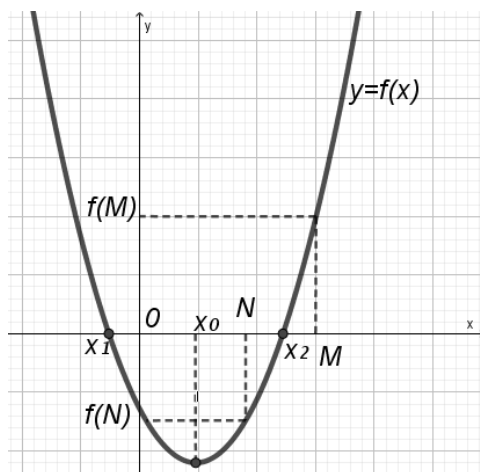
Ответ: $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$

Утверждение 6. Для того, чтобы больший корень квадратного трехчлена принадлежал интервалу $(N; M)$, а меньший не принадлежал, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} A \cdot f(N) < 0, \\ A \cdot f(M) > 0 \end{cases}$$

Утверждение 7. Для того, чтобы меньший корень квадратного трехчлена принадлежал интервалу $(N; M)$, а больший не принадлежал, необходимо и достаточно

выполнение условий:
$$\begin{cases} A \cdot f(N) > 0, \\ A \cdot f(M) < 0 \end{cases}$$

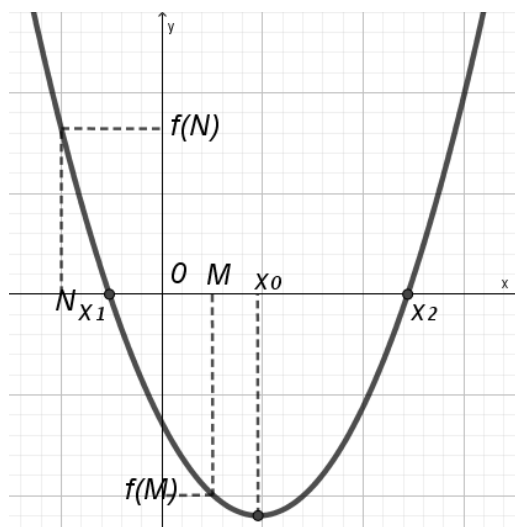


Утверждение 8. Для того, чтобы только один корень квадратного трехчлена принадлежал интервалу $(N; M)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$f(N) \cdot f(M) < 0.$$

При решении задач следует отдельно рассматривать случаи $D=0$ и $A=0$.

98. При каких p только один корень уравнения $x^2 - px + 6 = 0$ удовлетворяет условию $2 < x < 5$?



Решение: 1) $f(2) \cdot f(5) < 0$;

$$(10 - 2p) \cdot (31 - 5p) < 0 ; 5 < p < \frac{31}{5}.$$

2) Если $D=0$, то уравнение имеет один корень.

$$D = p^2 - 24; p^2 - 24 = 0; p = \pm 2\sqrt{6};$$

а) при $p = -2\sqrt{6}$, $x = -\sqrt{6}$;

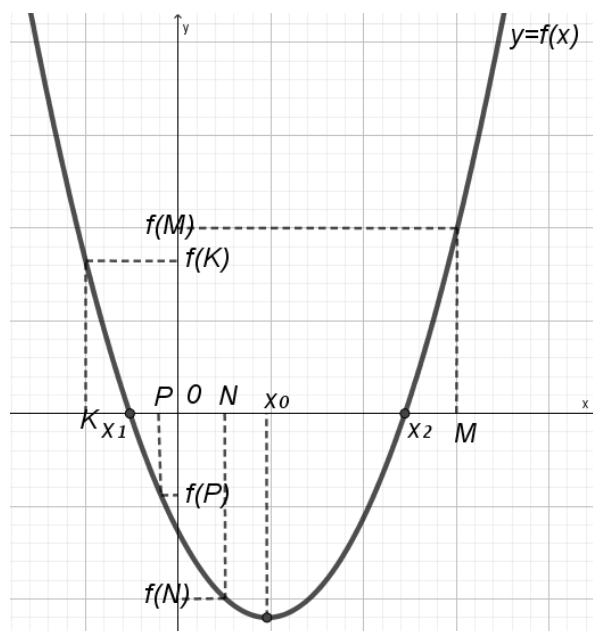
$$-\sqrt{6} \notin (2; 5);$$

б) при $p=2\sqrt{6}$, $x=\sqrt{6}$; $\sqrt{6} \in (2; 5)$.

Ответ: $\{2\sqrt{6}\} \cup \left(5; \frac{31}{5}\right)$.

Утверждение 9. Для того, чтобы один корень квадратного трехчлена принадлежал интервалу $(K; P)$, а другой – интервалу $(N; M)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} A \cdot f(K) > 0, \\ A \cdot f(P) < 0, \\ A \cdot f(N) < 0, \\ A \cdot f(M) > 0; \end{cases}$$



99. При каких m один из корней уравнения $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 2 = 0$ находится между числами 1 и 3, а второй – между числами 4 и 6?

Решение:

1 способ.

$$\begin{cases} m^2 - m - 2 > 0, \\ m^2 - 5m + 4 < 0, \\ m^2 - 7m + 10 < 0, \\ m^2 - 11m + 28 > 0; \end{cases} \begin{cases} f(1) > 0, \\ f(3) < 0, \\ f(4) < 0, \\ f(6) > 0; \end{cases} \quad 2 < m < 4$$

2 способ.

$$\begin{cases} 1 < m - 1 < 3 \\ 4 < m + 2 < 6 \end{cases} \quad 2 < m < 4$$

Ответ: $(2; 4)$.

Ключевыми являются утверждения 1-5 и задачи 90, 93, 95, 99. Учителю следует требовать графическую иллюстрацию к задачам и формулировку соответствующего утверждения.

Уравнения с одной переменной

При изучении уравнений, приводимых к квадратным, можно рассмотреть задачи:

100. При каких значениях a уравнение $x^2 - (a+1)|x| + a = 0$ имеет 3 различных корня?

Решение:

$$|x|^2 - (a+1)|x| + a = 0; \quad |x| = t, \quad t \geq 0;$$

$$t^2 - (a+1)t + a = 0; \quad (1)$$

Исходное уравнение имеет 3 различных корня, если уравнение (1) имеет $t_1 = 0; t_2 > 0$

$$\begin{cases} t_1 = a, \\ t_2 = 1; \end{cases} \begin{cases} |x| = a, \\ |x| = 1; \end{cases} \begin{cases} |x| = a, \\ x = 1, \\ x = -1 \end{cases} \quad a = 0$$

Ответ: $a = 0$.

101. При каких a уравнение $x^4 - (3a-1)x^2 + 2a^2 - a = 0$ имеет 2 различных корня?

Решение:

$$x^2 = t, \quad t \geq 0;$$

$$t^2 - (3a-1)t + 2a^2 - a = 0; \quad (1)$$

Исходное уравнение имеет 2 различных корня:

1) когда уравнение (1) имеет корни разных знаков, т. е. $t_1 \cdot t_2 < 0$,

$$2a - a < 0;$$

$$0 < a < \frac{1}{2};$$

2) когда уравнение (1) имеет один положительный корень, т. е. $D = 0, t_0 > 0$,

$$D = 9a^2 - 6a + 1 - 4(2a - a) = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2;$$

$$(a - 1)^2 = 0; \quad a = 1.$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0; \quad t_0 = 1.$$

Ответ: $(0; 0,5) \cup \{1\}$.

Полезно решить ряд задач графическим способом.

102. Определить все значения a , при которых уравнение имеет 2 различных корня:

а) $x^2=4|x|+a$;

б) $2|x|=x^2+a$.

Ответ: а) $a=-4, a>0$; б) $a=1, a<0$.

103. При каких a уравнение $|x+3|=a|x-2|$ имеет единственное решение?

Ответ: $a=0$; $a=1$.

Можно показать учащимся три способа решения этой задачи, сравнить, выбрать более рациональный.

Не следует упускать возможности поразить школьников красотой математики. Использование свойства четности функции превращает сложную, на первый взгляд, задачу в устное упражнение.

104. При каком значении a уравнение $x^{10}-a|x|+a^2-a=0$ имеет единственное решение?

Решение: $f(x)=x^{10}-a|x|+a^2-a$ – четная функция.

Если x_0 – корень, то и x_0 – корень, следовательно $x_0=-x_0$; $x_0=0$ – необходимо, но не достаточно.

$$0^{10}-a|0|+a^2-a=0; a=0; a=1.$$

Проверка: а) при $a=0$; $x^{10}=0$; $x=0$.

б) при $a=1$; $x^{10}-|x|=0$; $x=0$; $x=\pm 1$ – не удовлетворяет условию.

Ответ: $a=0$.

105. При каком a уравнение $\frac{x^{2000}}{2}-\frac{x^2+a}{x^2+1}+a^2=0$ имеет один корень?

Ответ: $a=1$.

Если в 7-9 классах проделать соответствующую работу по изучению параметров, заложить основы материала, то это существенно облегчит решение параметрических задач в 10-11 классах.

Заключение

Прежде всего нужно сказать, что хороших результатов ждать сразу не следует. Если у ученика есть маломальские математические способности, то в итоге он "вырастет" до параметрических задач. Некоторые же дети в силу их психологии, генетического кода так и не смогут общаться с параметрами ни на "ты", ни на "вы". Не следует этого жестко и требовать, раз они не будут связывать свою жизнь с математикой.

Однако же учащиеся, которые "вошли во вкус", способны на большие успехи. Конечно, в основном, нестандартные методы решения, рациональные приемы они демонстрируют в 10-11 классах, но база для этого должна закладываться кропотливым вдумчивым трудом, начиная с 5 класса.

Целенаправленно изучая этот вопрос, можно достичь запланированных результатов, предполагающих формирование соответствующих умений и навыков.

Вот только как высоко поднять "планку", зависит от обучаемых. Можно ограничиться минимальным уровнем. Это уже хорошо. Можно расширить содержание, добавив тему "Решение систем с параметрами".

Система предложенных заданий саморегулируема. Учитель может по своему усмотрению переставить сами темы в течение года или перенести часть материала на следующий год.

Единственное серьезное требование к учителю-чутко улавливать при объяснении, все ли нюансы изучаемого вопроса "разложились по полочкам" в головах учеников; кропотливо, терпеливо, еще и еще раз объяснять трудные моменты; иметь в запасе много простеньких задач по всем темам. В 7-9 классах главное-качественное изучение блока ключевых задач. С большим разнообразием использования параметра ученики столкнутся в 10-11 классах.

Учитель не должен забывать о цели развития математического мышления: строгости логических построений, четкости речи, полноты рассуждений, точности определений.

Реализация этой цели делает неизбежным отказ от единообразного, уравнительного преподавания математики, унифицирующего как содержание обучения, так и уровень требований к математической подготовке учащихся. А это значит, учитель сам может определять объем дополнительной информации и требования к уровню овладения этой информацией различными учащимися.

Литература

1. *Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И.*, «Сборник задач по алгебре: Учеб. пособие для 8-9 кл. с углубл. изучением математики», М.: "Просвещение", 2019. – 301с.
2. *Прокофьев А.А., Корянов А.Г.*, «Математика. ЕГЭ. Задачи с параметрами (типовое задание 17)», Ростов-на-Дону, Легион, 2022 .- 383с.
3. *Шахмейстер А.Х.*, «Уравнения и неравенства с параметрами» С.-Птб.: Виктория плюс, 2019. - 304с.
4. *Шестаков С.А.* «ЕГЭ 2022. Математика. Задачи с параметром. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2022. – 288с.
5. *Шихова Н.А.* Задачи с экономическим содержанием. — М.: ИЛЕКСА, 2018. — 97 с.

Дополнительная литература

1. *Иванов С.О., Войта Е.А., Коннова Е.Г., Ольховая Л.С., Ханин Д.И.*, «Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ-2015: задание 20 (профильный уровень) / Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015. – 64с.
2. *Коннова Е.Г.* «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром. – Ростов-на-Дону, Легион, 2014. – 64с.
3. Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развернутым ответом: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2016. – 368с.
4. *Мерзляк А.Г., Якир М.С.*, «Алгебраический тренажер. Пособие для школьников и абитуриентов», М.: "Илекса", 2007 – 332с.

**Методика обучения решению задач
с параметрами в основной школе**

Учебно-методическое пособие

Сдано в набор 18.09.2023 Подписано в печать 20.09.2023
350080, г. Краснодар, ул. Сормовская, 167,
ГБОУ ИРО Краснодарского края
Информационно-издательский ресурсный центр