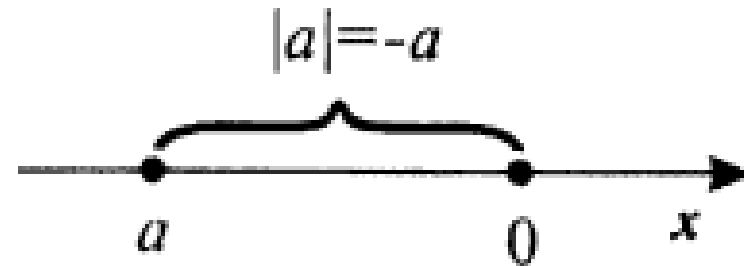
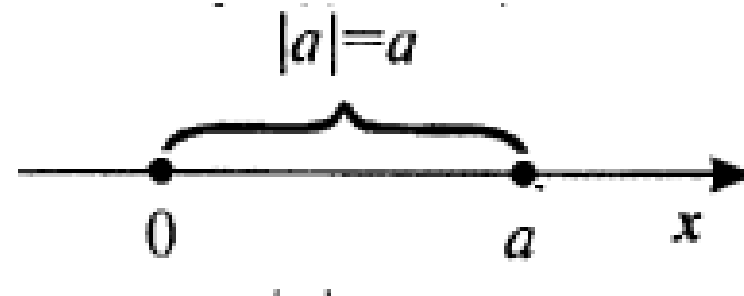




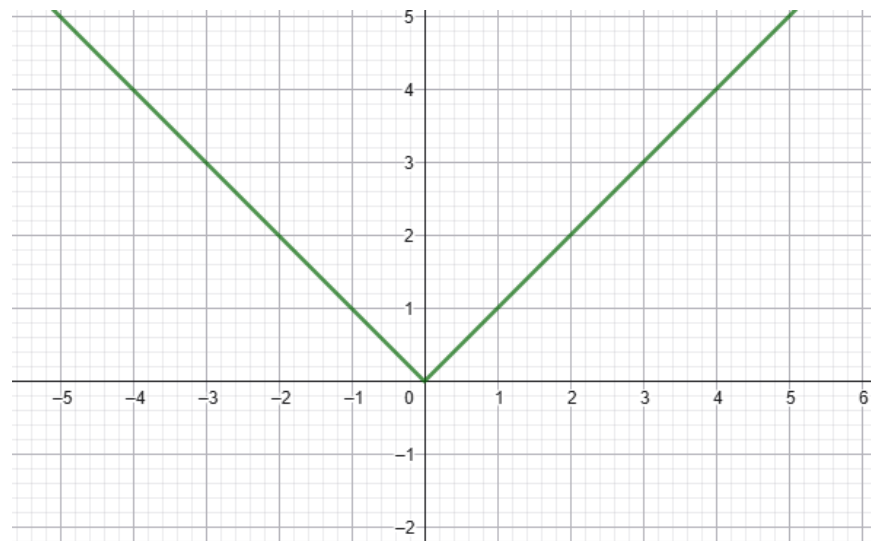
# Эволюция модуля: от простого к сложному

Задорожная Ольга Владимировна  
Доцент кафедры математики,  
информатики и технологического образования  
ГБОУ ИРО Краснодарского края

Определение:  $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$



$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



**Пример 1.** Решите уравнение  $|2x-5|=x-1$

**Пример 1.** Решите уравнение  $|2x-5|=x-1$

1 способ

$$|2x - 5| = \begin{cases} 2x - 5, & x \geq \frac{5}{2} \\ -2x + 5, & x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\left[ \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 2x - 5 = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases} \right.$$
$$\left[ \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ -2x + 5 = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases} \right.$$

2 способ Возведение в квадрат

$$|2x - 5| = x - 1, \quad x - 1 \geq 0$$

$$(2x - 5)^2 = (x - 1)^2$$

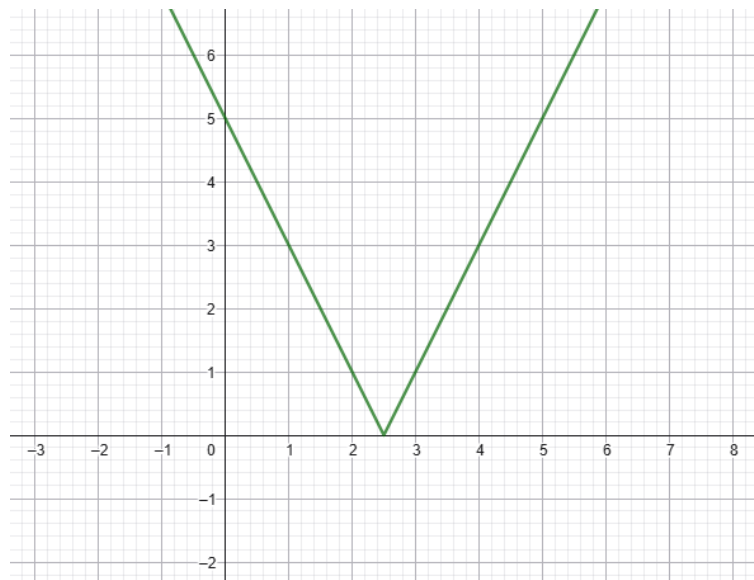
$$4x^2 - 20x + 25 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

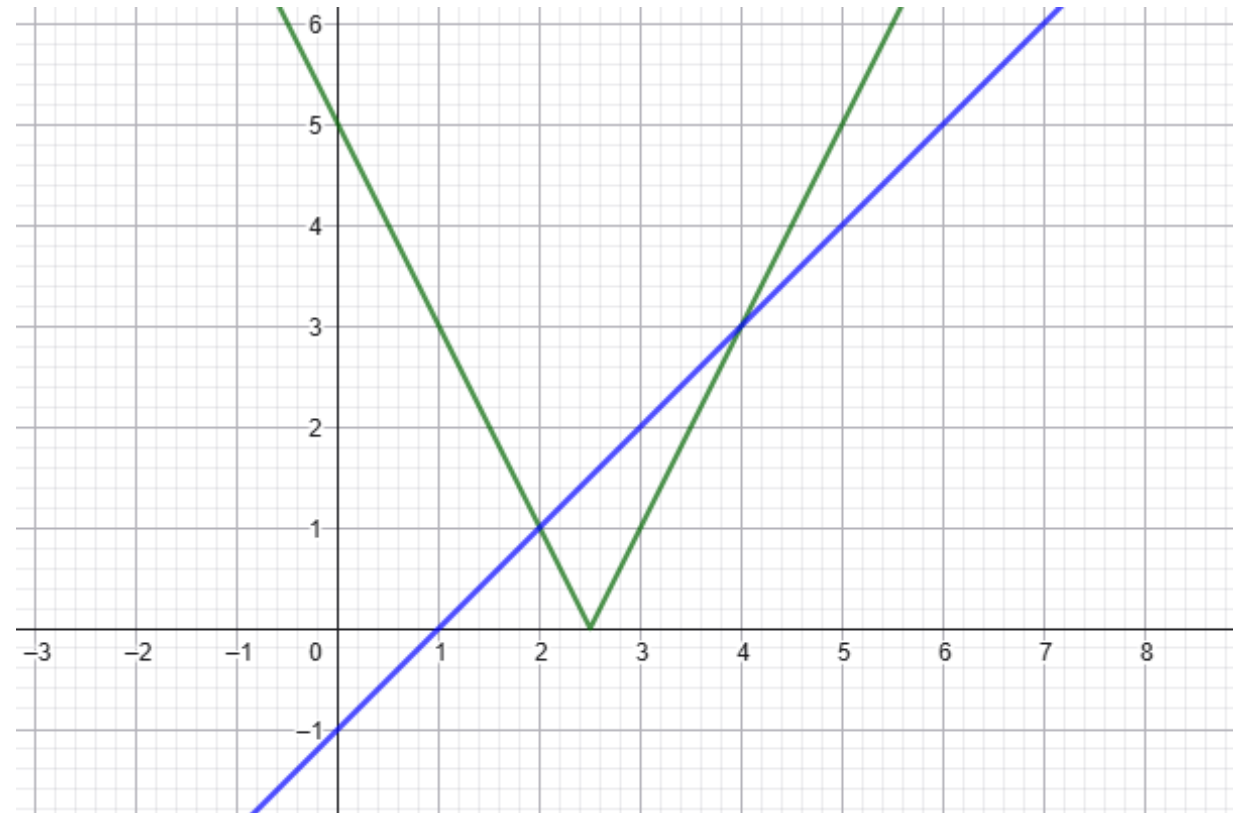
$$x = 2, x = 4$$

**Пример 1.** Решите уравнение  $|2x-5|=x-1$

3 способ



$$y = |2x - 5|$$

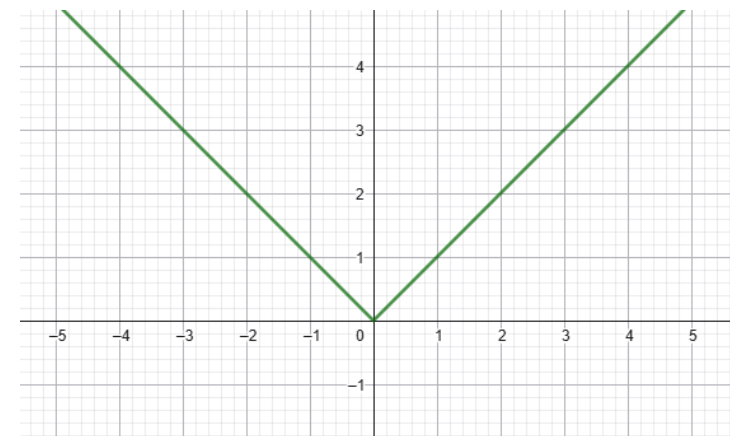


$$y = x - 1$$

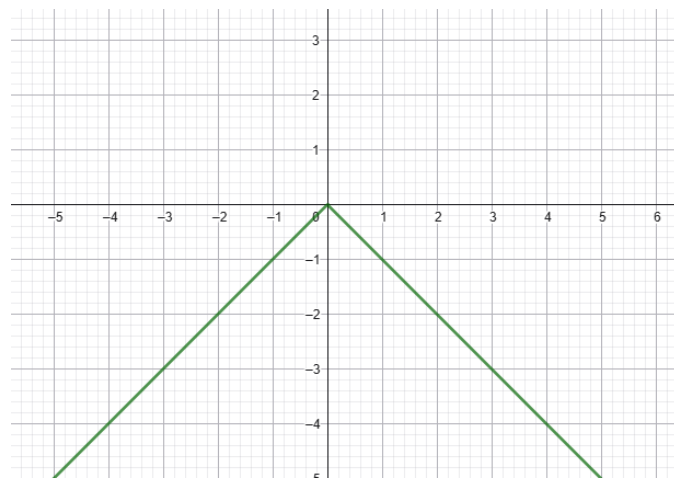
## Пример 2.

Решите уравнение  $|5 - |x|| = 3$ .

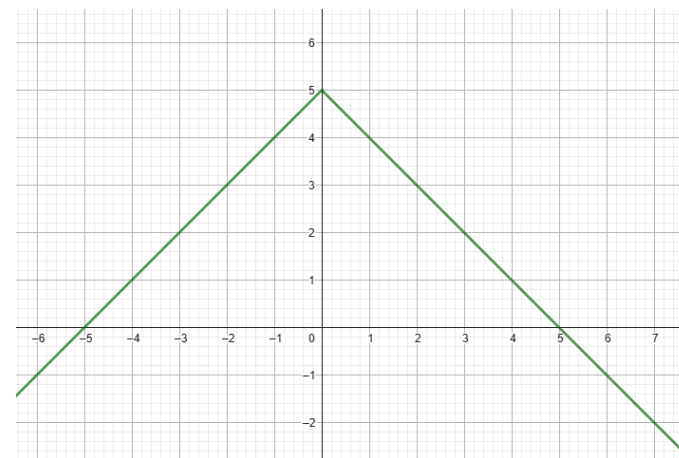
$$y=|x|$$



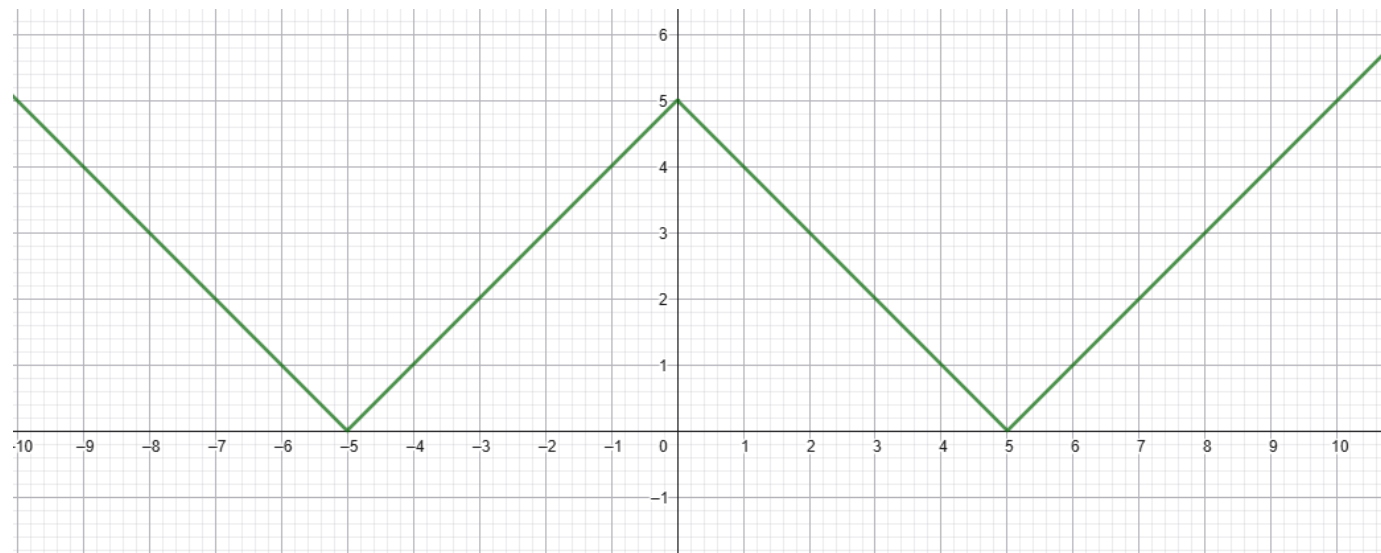
$$y=-|x|$$



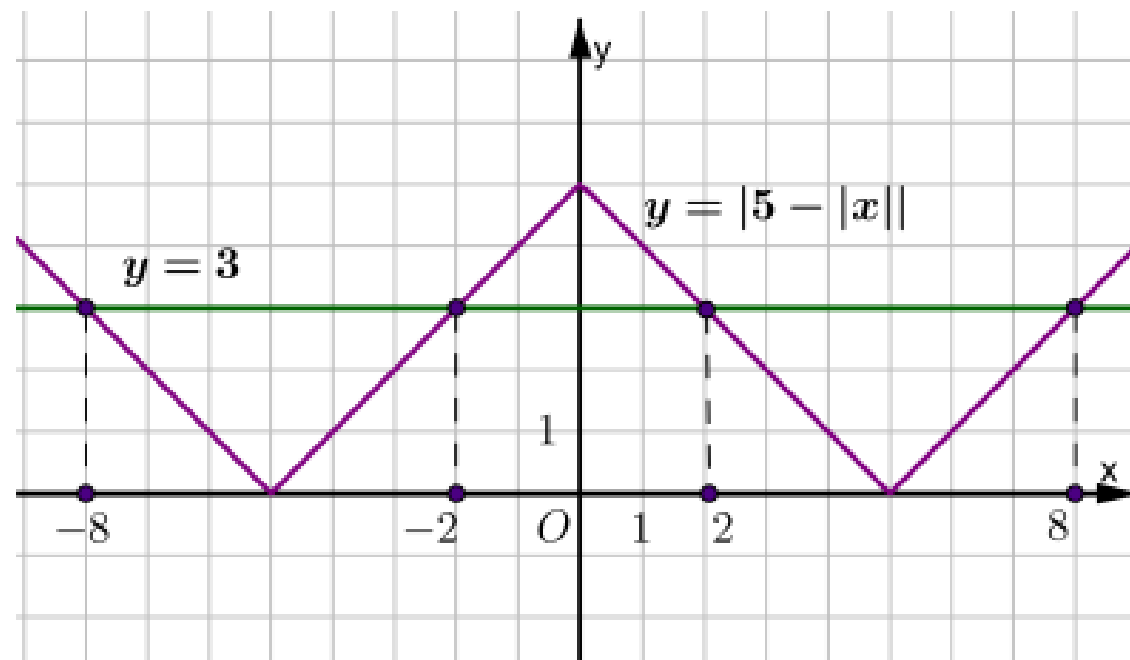
$$y=5-|x|$$



$$y=|5-|x||$$



**Пример 3.** Решите уравнение  $|5-|x||=3$ .



Ответ:  $-8, -2, 2, 8$

# Метод интервалов

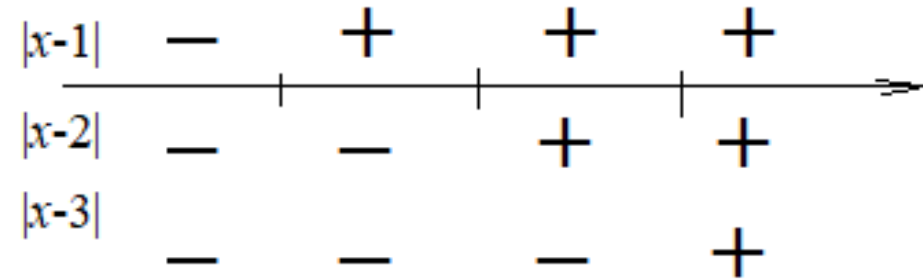
**Пример 3.** Решите уравнение

$$|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$$

**Пример 3.** Решите уравнение

$$|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$$

1 способ



$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ -x + 1 + 2x - 4 - 3x + 9 - 4 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x < 2 \\ x - 1 + 2x - 4 - 3x + 9 - 4 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq x < 3 \\ x - 1 - 2x + 4 - 3x + 9 - 4 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x - 1 - 2x + 4 + 3x - 9 - 4 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ x = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x < 2 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq x < 3 \\ x = 2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x = 5 \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ x = 5 \end{array} \right.$$

Ответ:  $x \in [1; 2] \cup \{5\}$

**Пример 3.** Решите уравнение

$$|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$$

2 способ

$$f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|$$

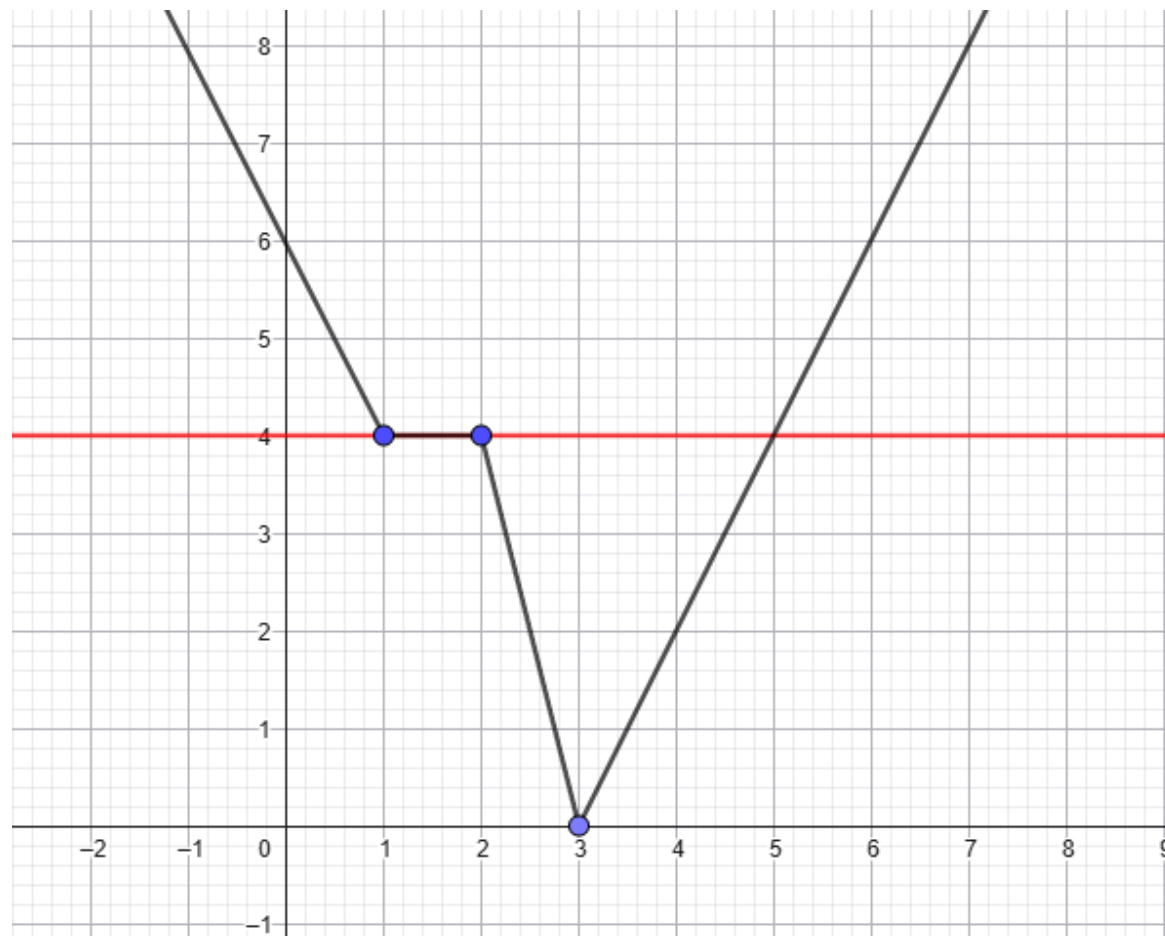
$$x < 1: f(0)=6$$

$$f(1)=4$$

$$f(2)=4$$

$$f(3)=0$$

$$x > 3: f(4)=2$$

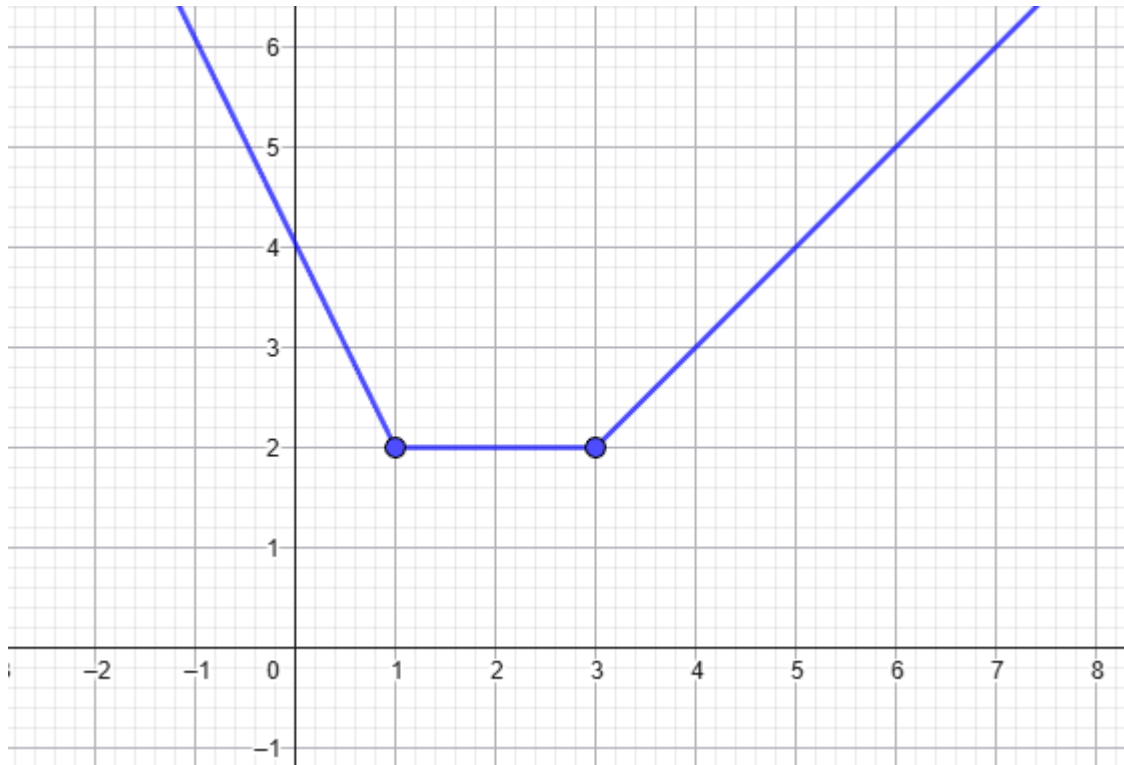


Ответ:  $x \in [1; 2] \cup \{5\}$

**Пример 4.** Решить уравнение  
 $|x-1|+|x-3|=a.$

**Пример 4.** Решить уравнение  $|x-1|+|x-3|=a$ .

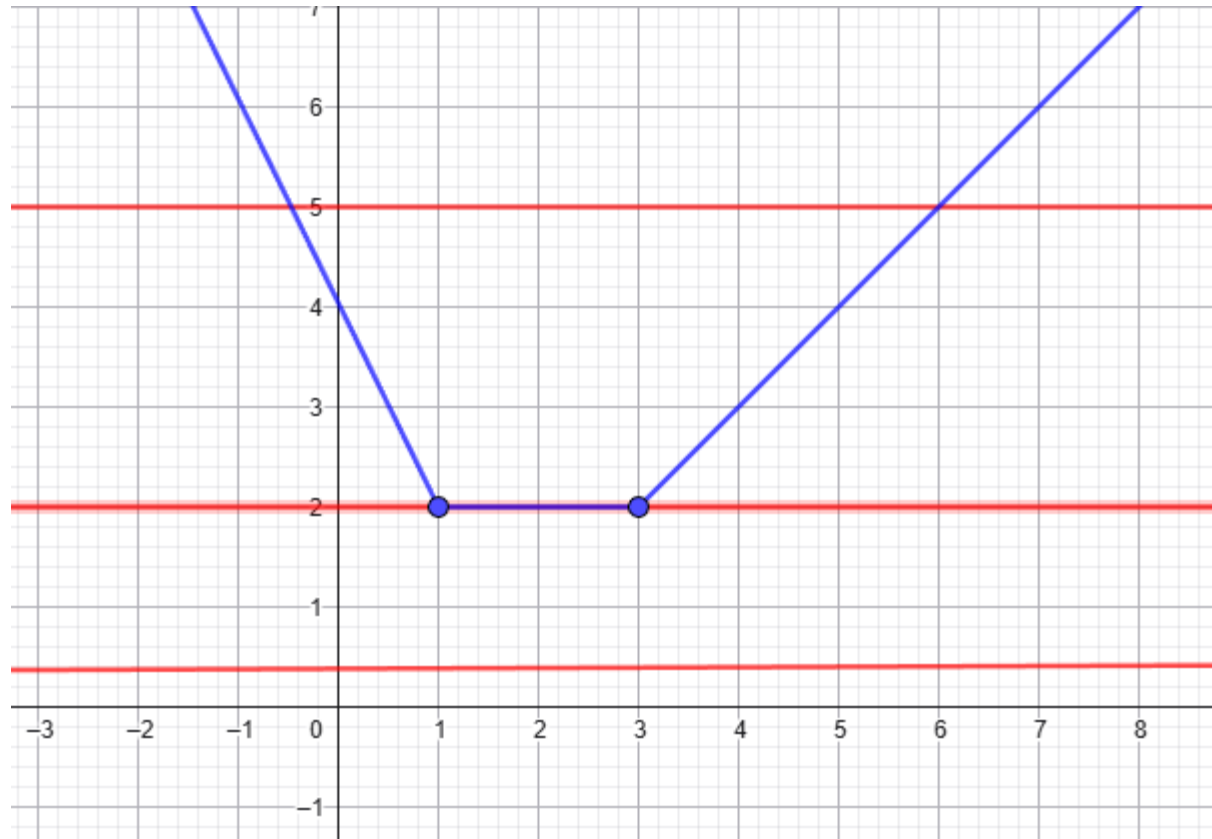
$$y=|x-1|+|x-3|$$



$$\begin{array}{c} |x-1| \quad - \quad + \quad + \\ |x-3| \quad - \quad - \quad + \end{array} \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leq x < 3 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \end{array} \right.$$

**Пример 4.** Решить уравнение  $|x-1|+|x-3|=a$ .



$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = a \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{4-a}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = a \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{a+4}{2}$$

Если  $a > 2$ , то два корня  $x = \frac{4-a}{2}, x = \frac{4+a}{2}$

Если  $a = 2$ , то  $x \in [1; 3]$

Если  $a < 2$ , то решений нет.

**Пример 5.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

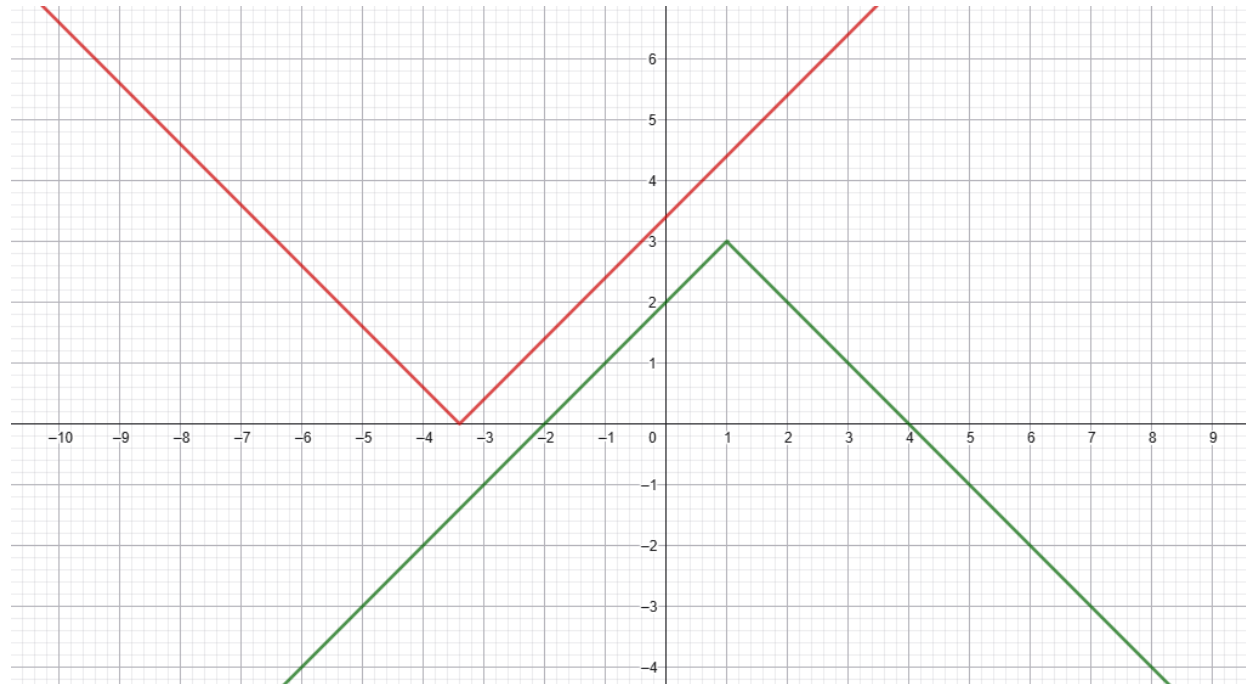
$$|x-1|+|x-a|=3$$

имеет хотя бы одно решение?

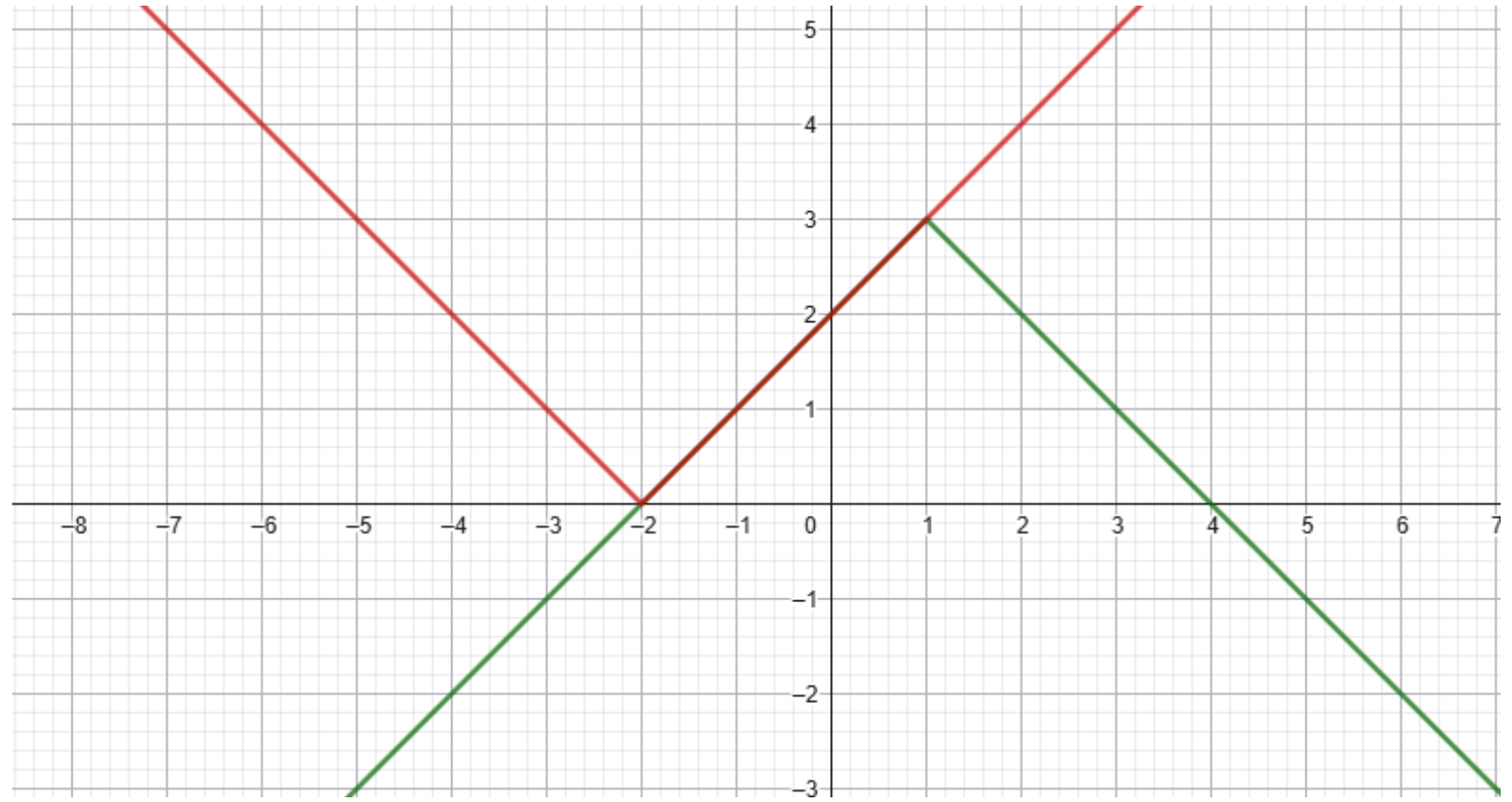
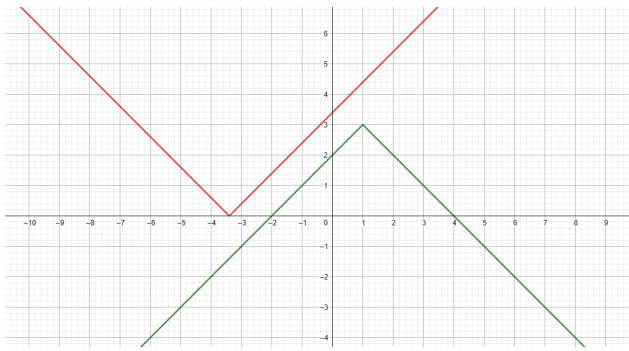
$$|x-a|=3-|x-1|$$

$$y=|x-a|, y=3-|x-1|$$

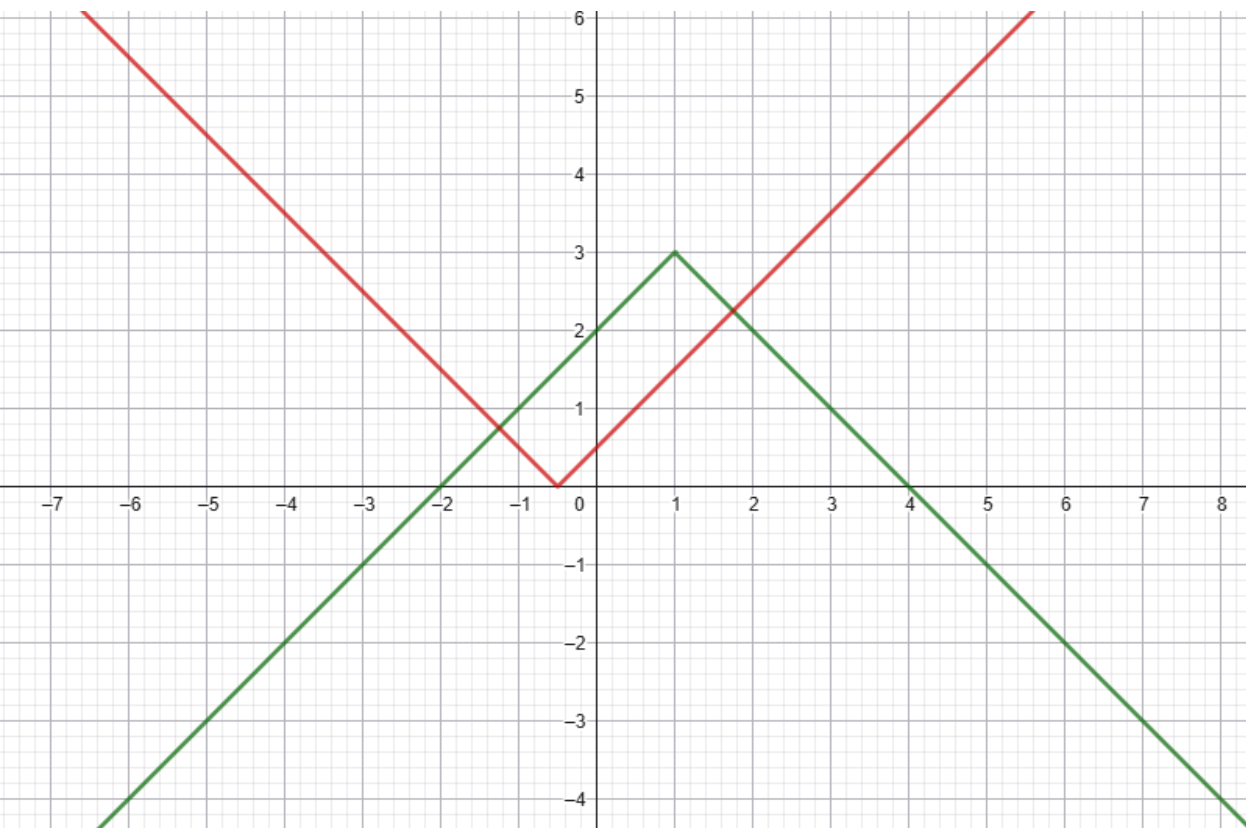
Коэффициенты при  $x$  равны 1 или -1, значит прямые параллельны, или совпадают.



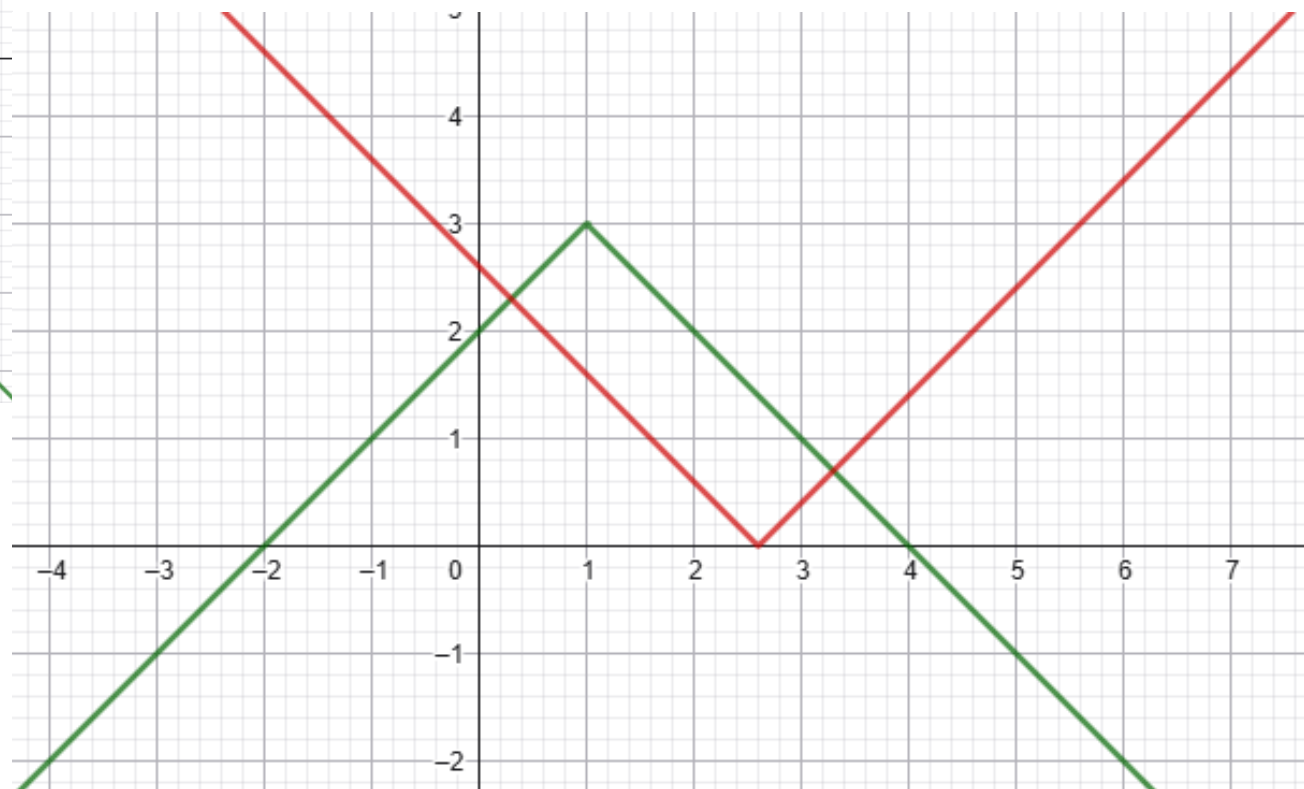
$$a < -2$$

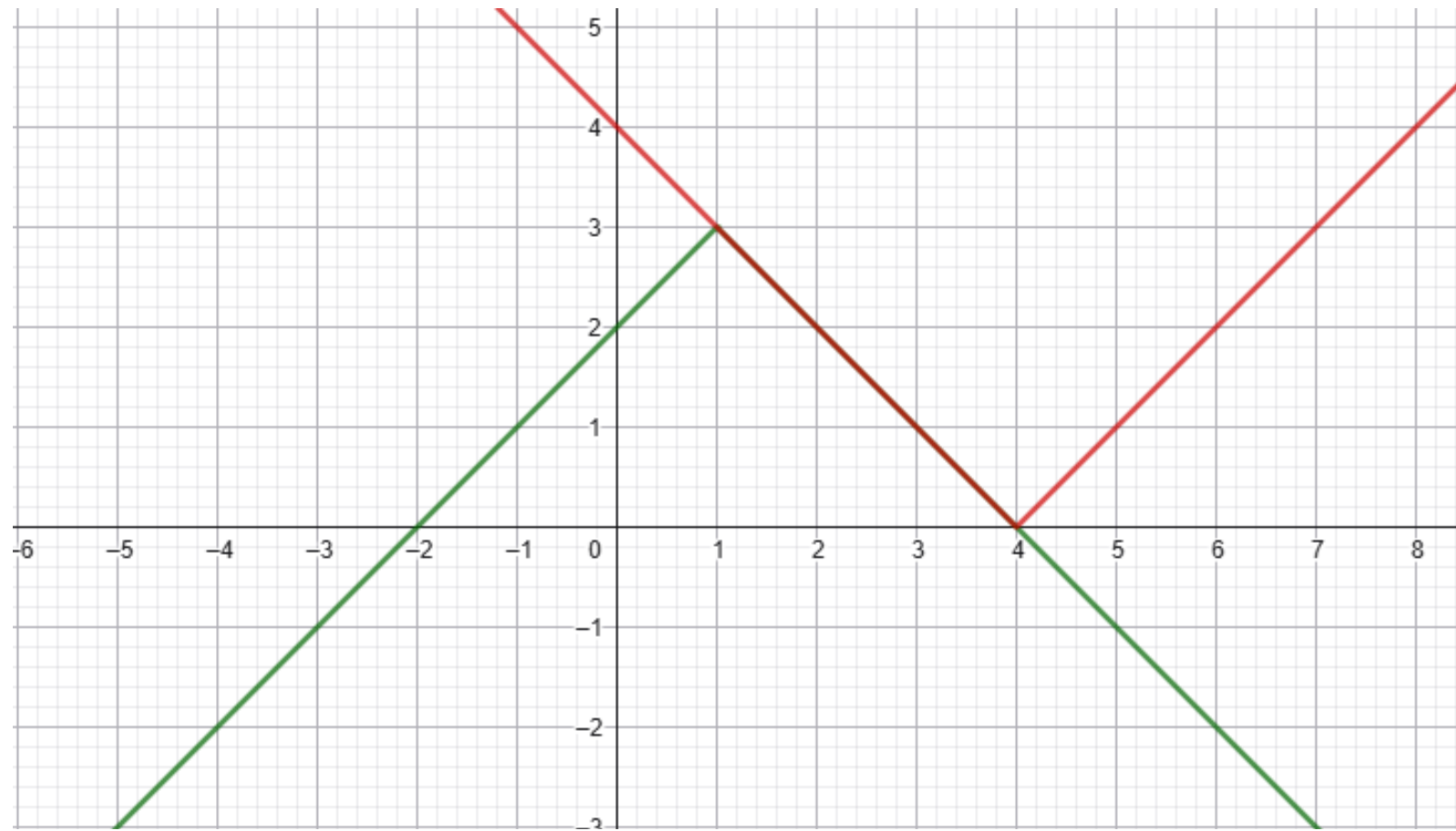
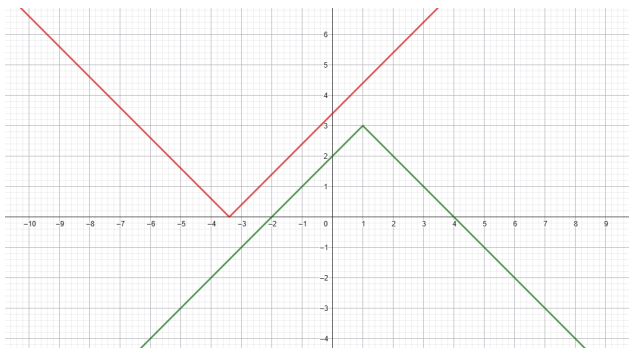


$$a = -2$$

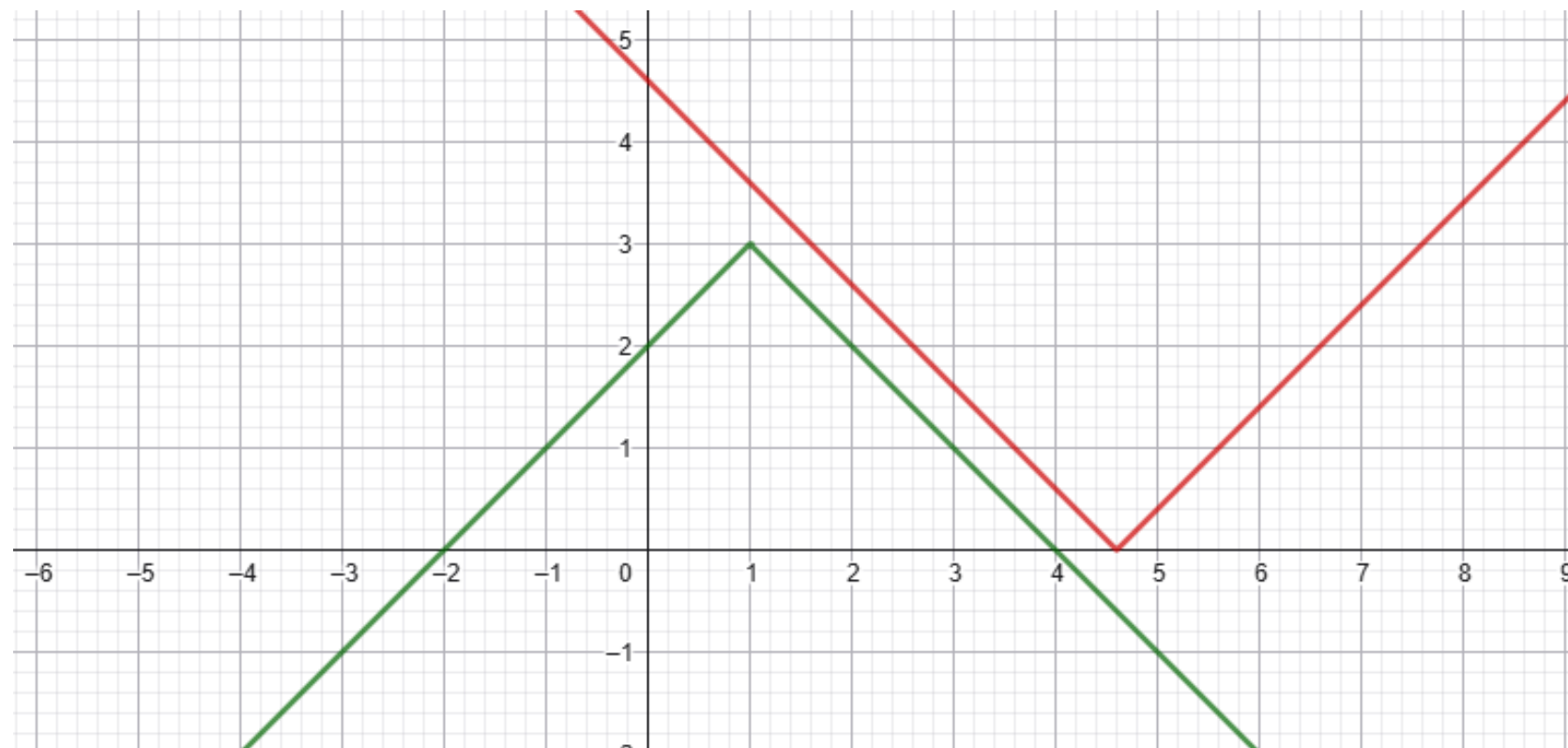
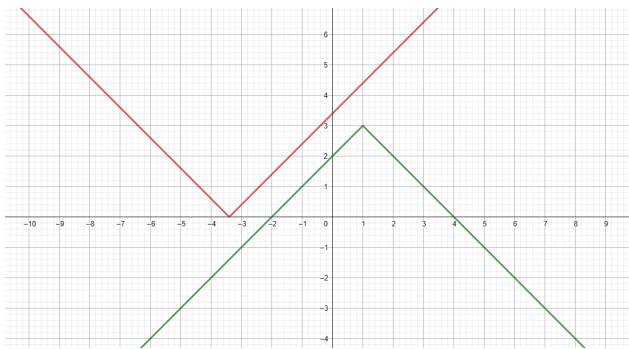


$$a \in (-2; 4)$$





$$a=4$$



$a > 4$

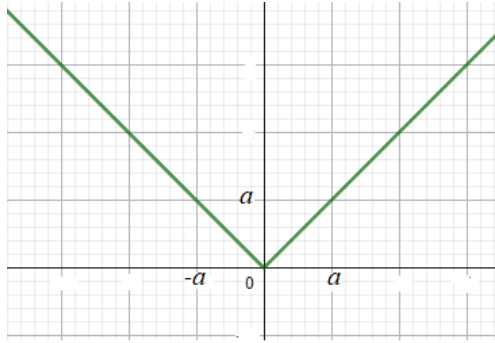
Ответ:  $a \in [-2; 4]$

**Пример 6.** Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $x - a = 2|2|x| - a^2|$  имеет три различных корня

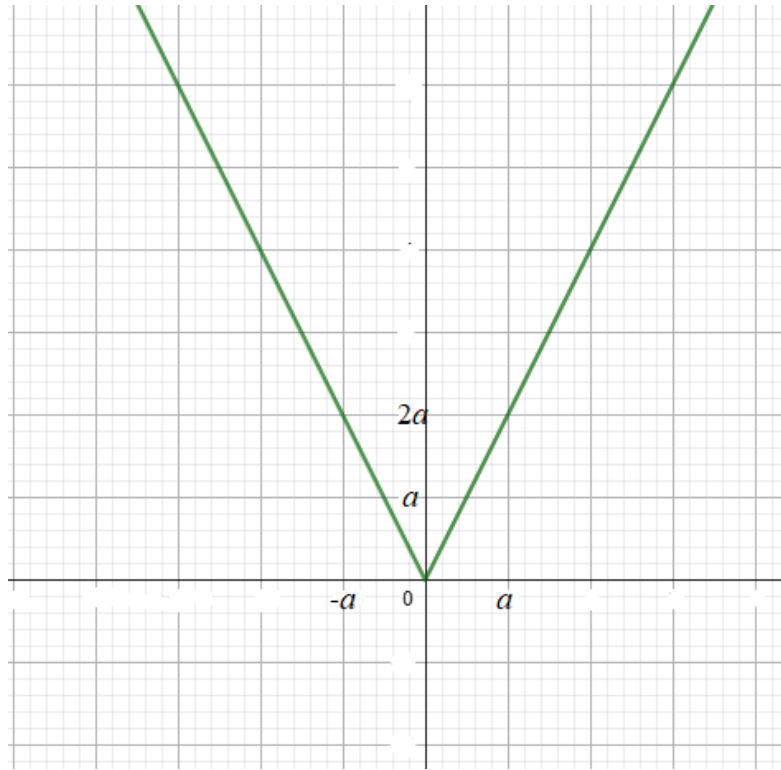
Уравнение  $x-a=2|2|x|-a^2|$  имеет три различных корня

$$y=2|2|x|-a^2|$$

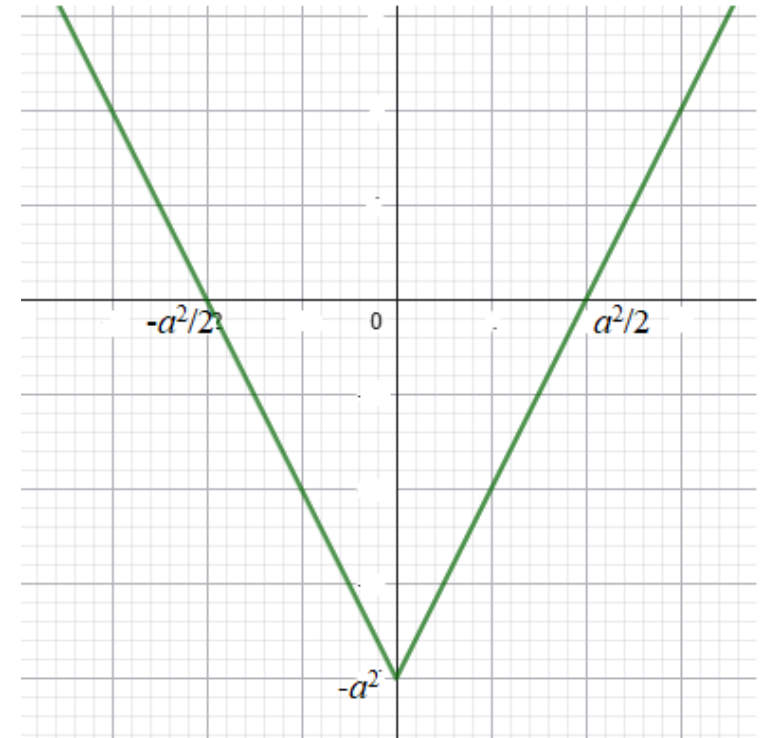
$$y=|x|$$



$$y=2|x|$$

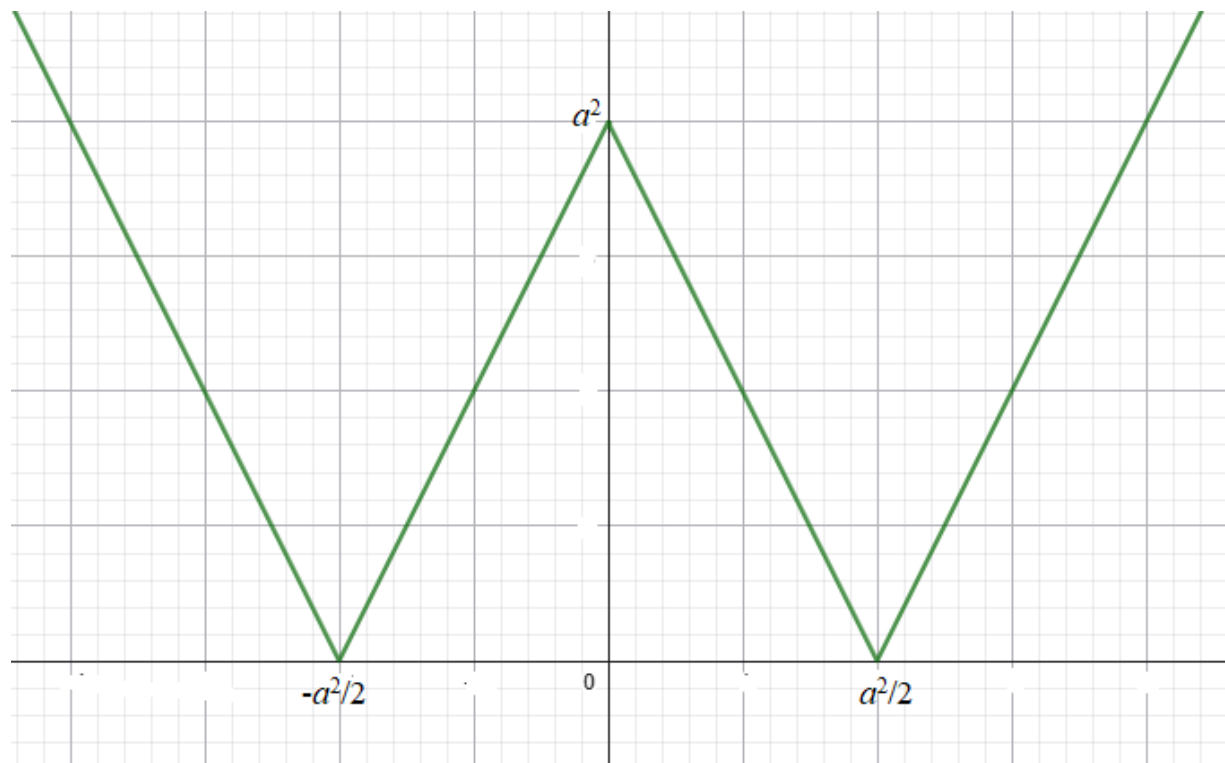


$$y=2|x|-a^2$$

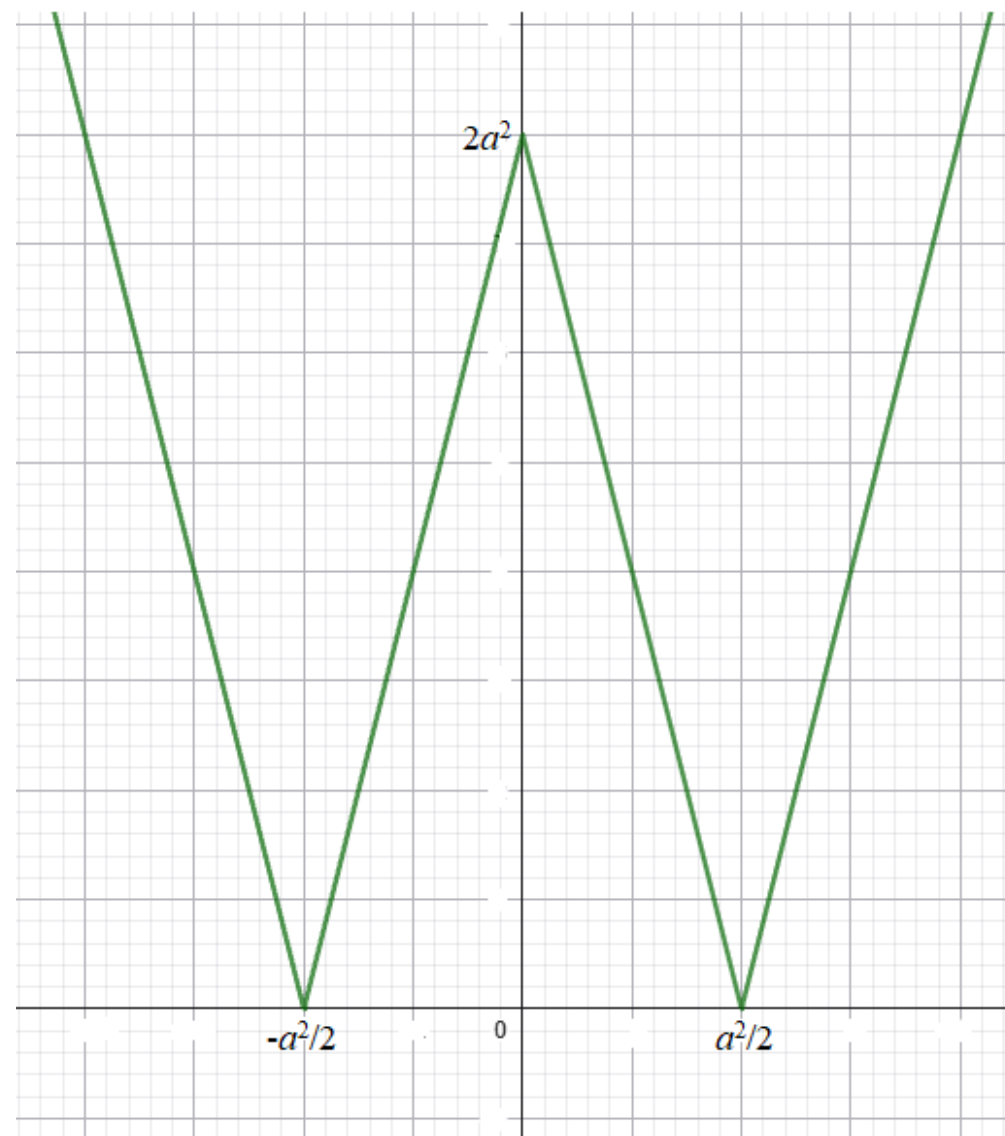


$$y=2|2|x|-a^2|$$

$$y=|2|x|-a^2|$$



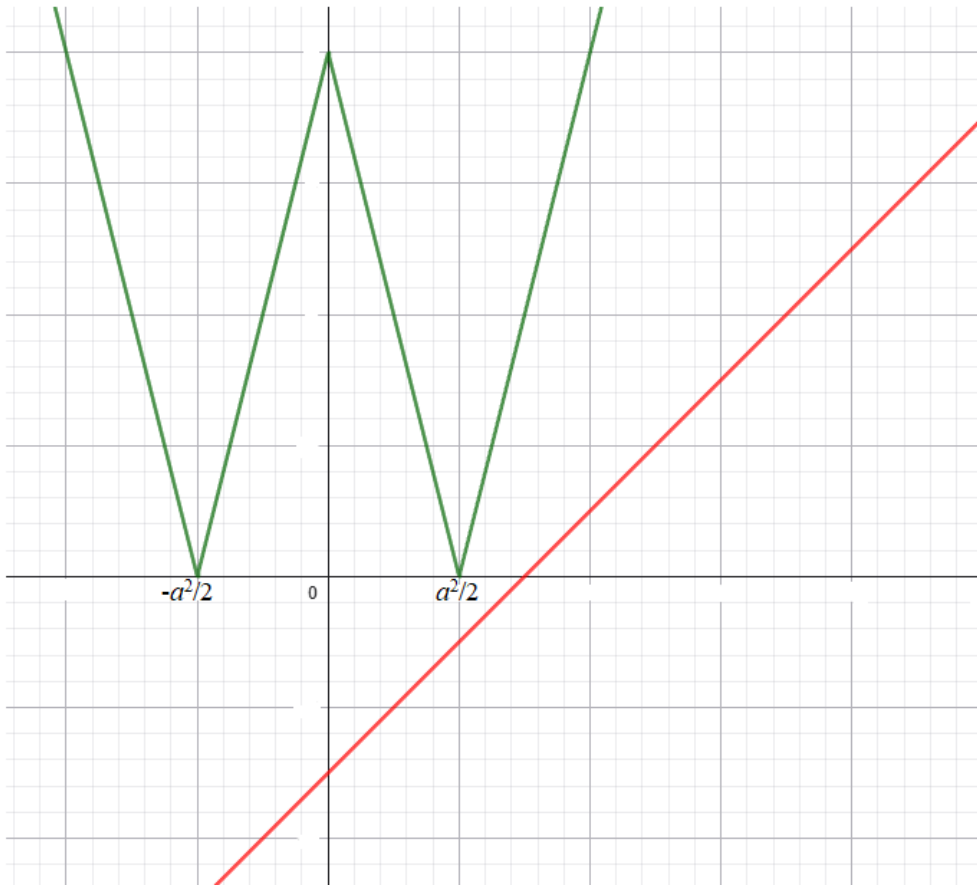
$$y=2|2|x|-a^2|$$



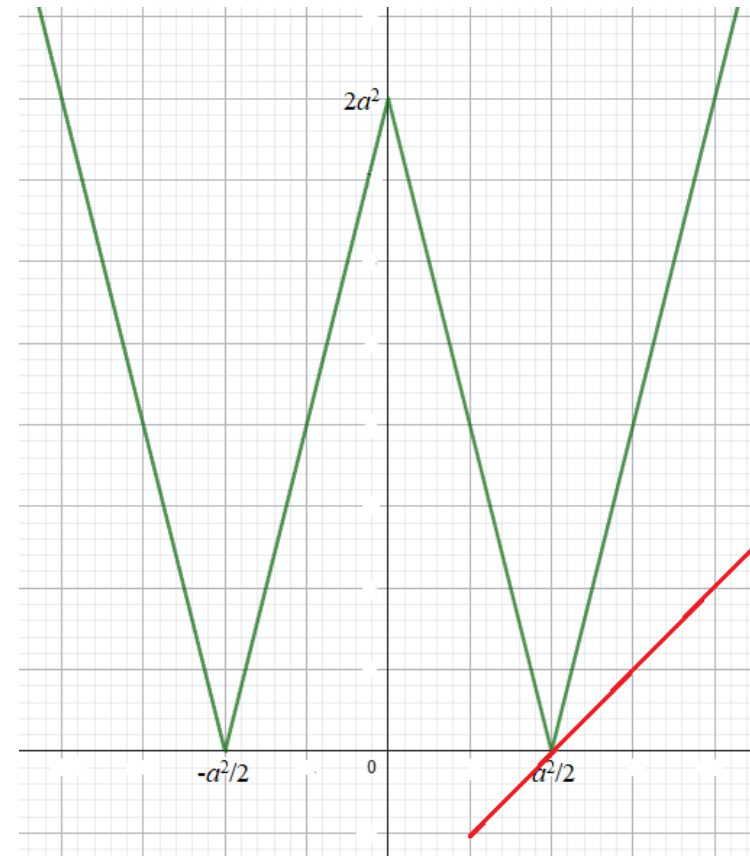
Уравнение  $x-a=2|2|x|-a^2|$  имеет три различных корня

$y=2|2|x|-a^2|$  : Коэффициент при  $x$  для любых прямых равен  $\pm 4$ .

Коэффициент прямой  $y=x-a$  равен 1, а значит, она не параллельна ни одной из прямых построенного графика.

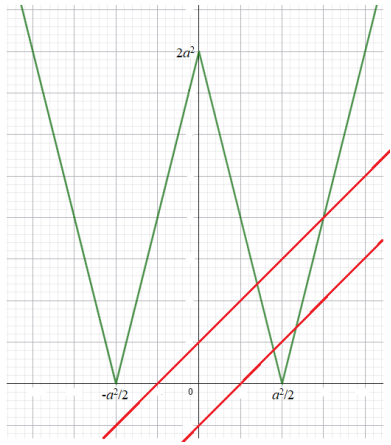


Нет корней

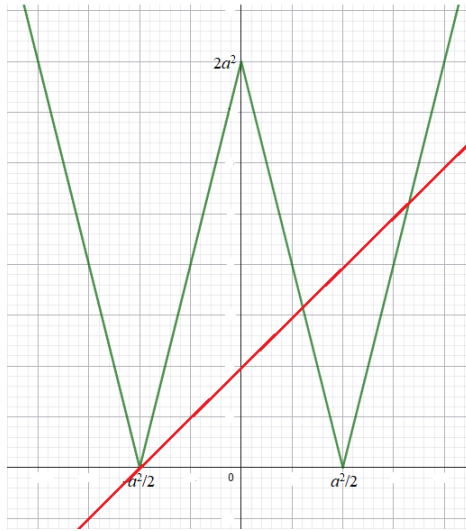


Один корень

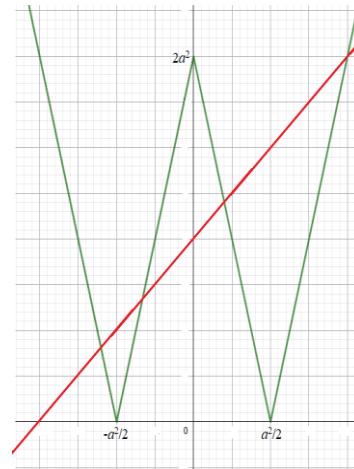
Два корня



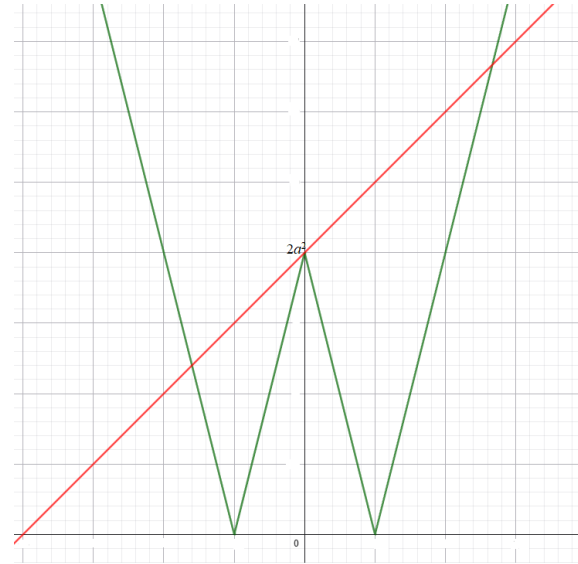
Три корня



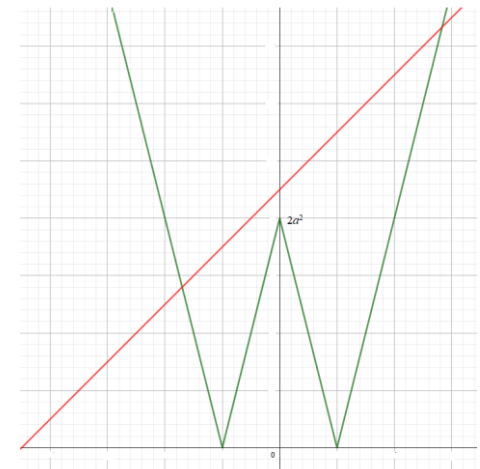
Четыре корня



Три корня



Два корня



Прямая  $y=x-a$   
проходит через  
точку  $(a^2/2; 0)$   
 $0=a^2/2-a$ ,  $a=0$ ,  $a=2$

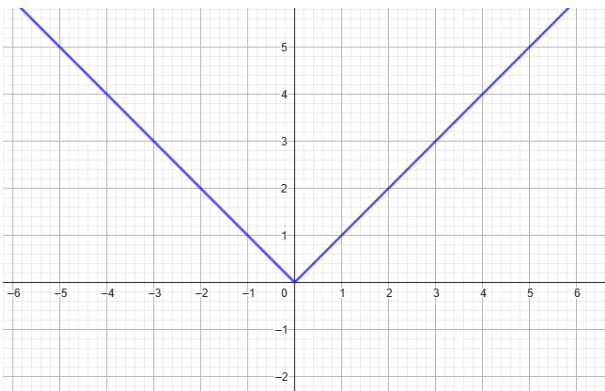
Прямая  $y=x-a$   
проходит через точку  
 $(0; 2a^2)$   
 $2a^2=0-a$ ,  $a=0$ ,  $a=-1/2$

$a=0$ ,  $a=-1/2$ ,  $a=-2$ .

**Пример 7.** Сколько корней имеет уравнение

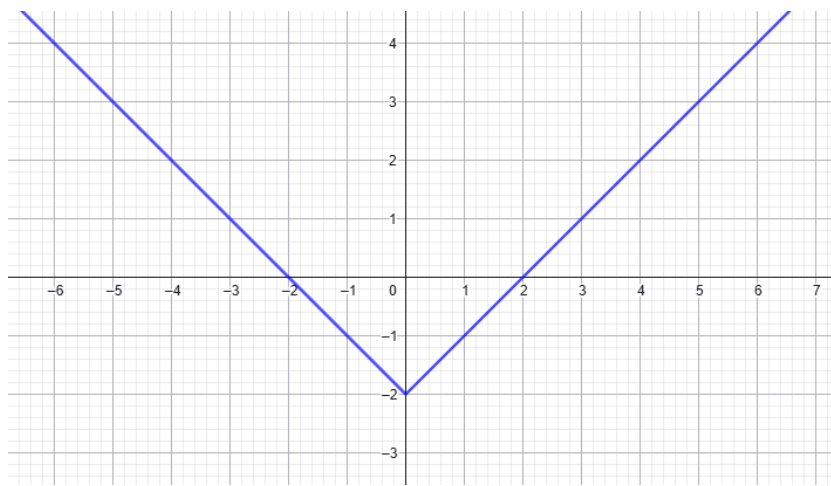
$||x|-2|=a$  при различных значениях параметра  $a$ ?

$$y=|x|$$

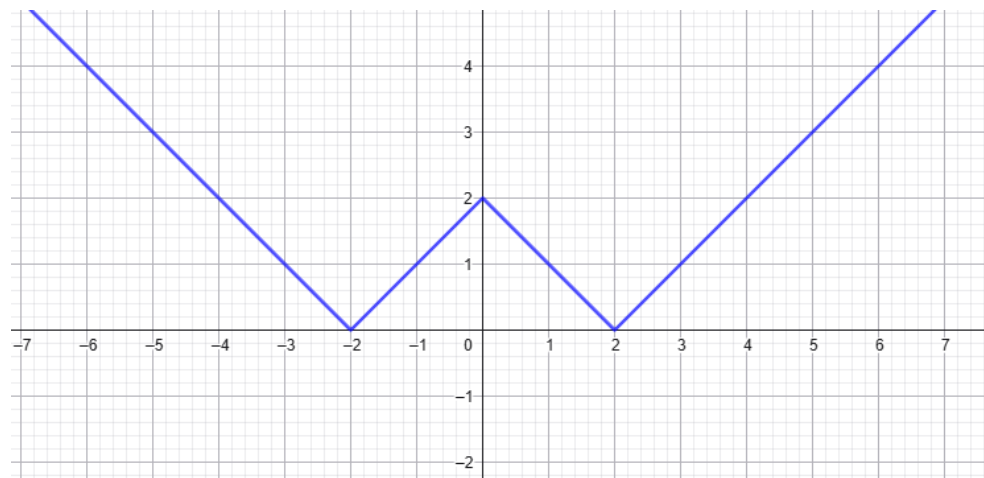


$$y=||x|-2|$$

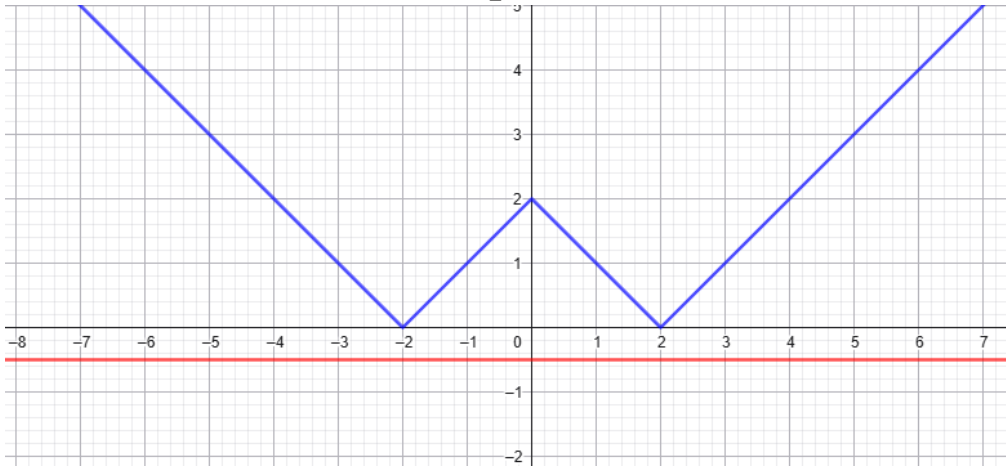
$$y=|x|-2$$



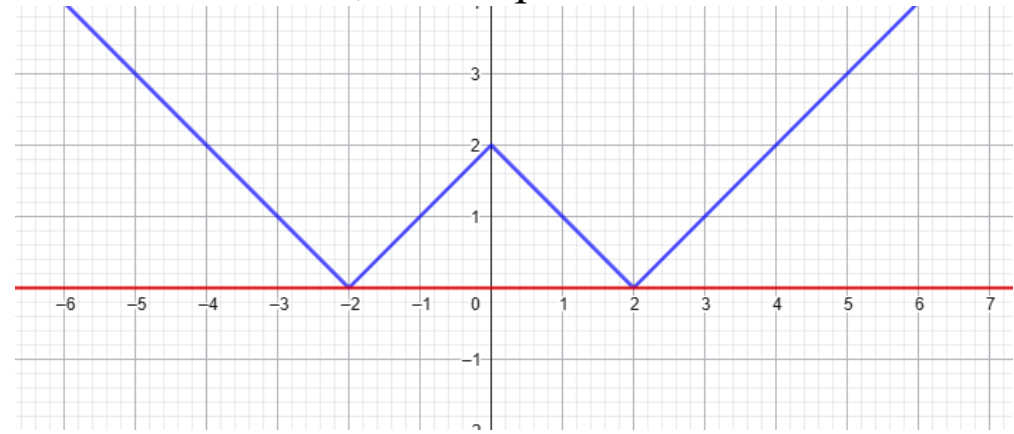
$$y=||x|-2|$$



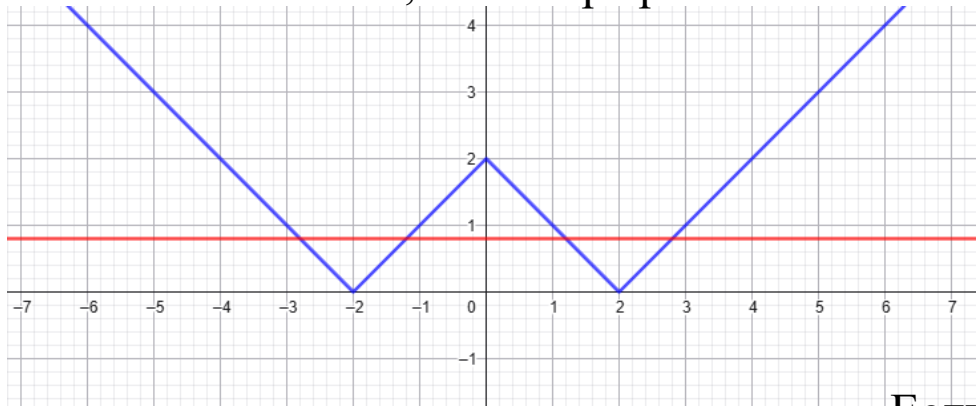
Если  $a < 0$ , то решений нет



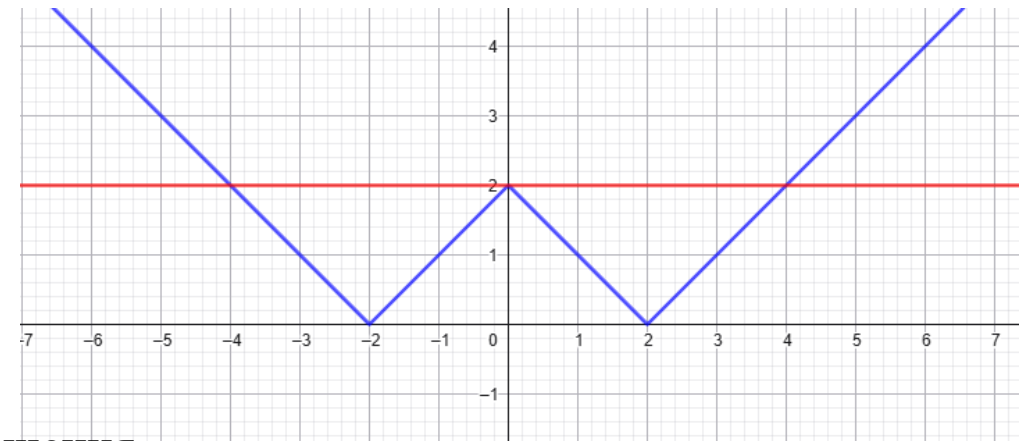
Если  $a = 0$ , то два решения  $x = -2, x = 2$



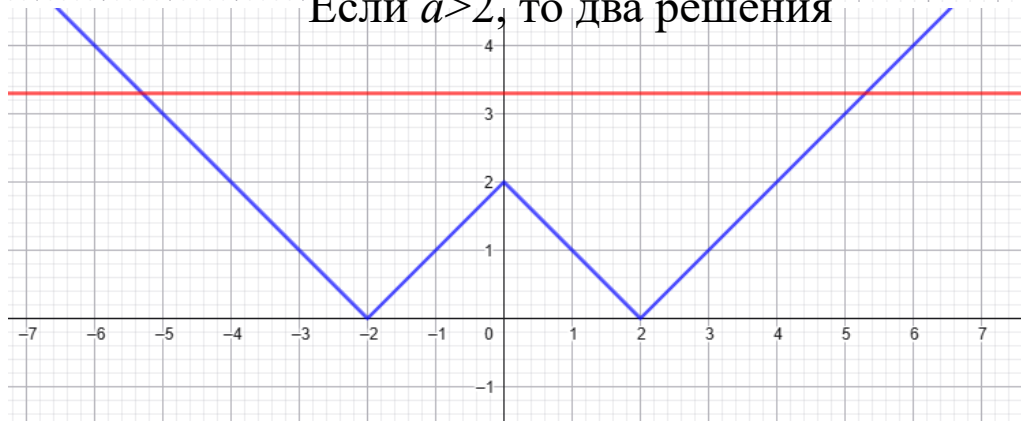
Если  $0 < a < 2$ , то четыре решения



Если  $a = 2$ , то три решения



Если  $a > 2$ , то два решения



$$y = ||x| - 2|$$
$$y = a$$

